ELY BRETT C.
Egresado I.P.C.

WILLIAM A. SUÁREZ
Egresado I.U.P.E.B.

TEORÍA Y PRÁCTICA DE

FÍSICA

1ER AÑO
CICLO DIVERSIFICADO

TEORÍA
PRÁCTICA
PROBLEMARIO
AUTOEVALUACIÓN

UNIDAD 0

UNIDAD DE NIVELACIÓN

- Ejercitación previa. Despejes.
- Rectas paralelas cortadas por una secante.
- Teorema de Pitágoras.
- Trigonometría de los triángulos rectángulos.
- Ley de los cosenos.
- Ley de los senos.
- Introducción vectorial.

UNIDAD 0

UNIDAD DE NIVELACION

0.1 Ejercitación previa

A continuación se proponen una serie de ejercicios para que adquieras destreza en las operaciones de uso frecuente en el desarrollo del contenido programático.

1. Se da la siguiente expresión:

$$P = \frac{1}{a - b} - \frac{1}{a + b}$$

Encontrar el valor de P para a = 3 y b = 1

R: 1/4

2. En la expresión ma + Ma = P-q encontrar el valor de a para los valores dados P = 20, q = 10, m = 0,2 y M = 0,3

R: 20.

3. En cada una de las expresiones despejar la letra señalada en el paréntesis de la derecha:

3.1 $\frac{4a - 35}{3} = 9(1 - a)$ .... (a)

3.2 $\frac{1}{m + 1} = \frac{1}{2m - 1}$ .... (m)

3.3 $\frac{1}{f} = \frac{1}{P} - \frac{1}{q}$ .... (q)

3.4 $\frac{1}{3x + 4} = \frac{2}{x + 8}$ .... (x)

3.5 $R = 2m\sqrt{\frac{S}{K}}$ .... (K)

3.6 $m(a + b) = aS + bK$ .... (b)

3.7 $h = hV + \frac{1}{2}mV^2$ .... (V)

3.8 $h = \sqrt{V^2 - 2ML}$ .... (M)

3.9 $hV = hV_o + \frac{1}{2}mV^2$ .... (h)

3.10 $F = \frac{M\,m}{r^2}$ .... (r)

4. Dada la expresión

$$S = Vt + \frac{}{2} at^2$$

Encontrar el valor de a para S = 100, V = 20 y t = 4

R: 2,5

5. Dada la expresión

$$mgy + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}KX^2$$

Encontrar el valor de X para los valores dados de V = 30 y = 8, g = 10, m = 20. K = 12

R: 42,03

6. Dada la expresión

$$T = 2H\frac{L}{S}$$

Calcular el valor de L para T = 0,2; S = 9 y H = 2,25

R: 0,2

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $t(13 - t) = 40$ **R: 8 y 5**

b) $\frac{3a + 14}{2a - 2} - 2a = 7$ **R: 7/4 y 4**

c) $\sqrt{m + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ **R: 2**

d) $\begin{cases} 3(2a + b) = -36 \\ -3a - b = 13 \end{cases}$ **R: -1 y -10**

e) $\begin{cases} 0{,}5m + 0{,}75n = m - 1{,}25 \\ 0{,}4m - 0{,}8n = n - 1{,}4 \end{cases}$ **R: 2 y 5,5**

f) $\frac{2a}{15} - \frac{3a-5}{20} = \frac{a}{5} - 3$ **R: 15**

g) $\begin{cases} 5X^2 - Y = 13 \\ 9X - 2Y = 4 \end{cases}$ **R: 2 y 7**

h) $\begin{cases} X^2 - Y^2 = 25 \\ X + Y = 25 \end{cases}$ **R: 13 y 12**

8. A continuación se te propone un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} m_2g - T = m_2a \\ T - m_1g = m_1a \end{cases}$$

8.1 Escribe una expresión en donde aparezca a en función de m_1, m_2 y g.

8.2 Escribe T en función de m_1, m_2 y g

9. A continuación se te presenta un par de ecuaciones:

$$\begin{cases} T = m_1.a \\ m_2 - T = m_2.a \end{cases}$$

9.1 Demuestra que a puede escribirse como

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

9.2 Demuestra que T puede escribirse como

$$T = \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

0.2 Rectas paralelas cortadas por una secante

Consideremos dos rectas **R** y **R'**, las cuales son paralelas entre sí.

Sea SS' una recta secante a las rectas **R** y **R'** tal como lo indica la figura 0.1.

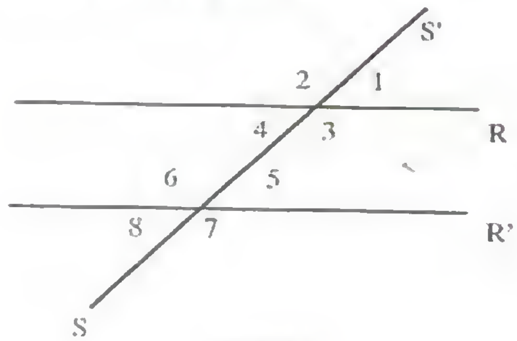


Figura 0.1

Dichas rectas originan algunos ángulos que mencionamos a continuación:

Alternos internos:

$$\begin{cases} \hat{4} \text{ y } \hat{5} \\ \hat{6} \text{ y } \hat{3} \end{cases}$$

Alternos externos:

$$\begin{cases} \hat{8} \text{ y } \hat{1} \\ \hat{7} \text{ y } \hat{2} \end{cases}$$

Correspondientes :

$$\begin{cases} \hat{5} \text{ y } \hat{1} \\ \hat{7} \text{ y } \hat{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{4} \text{ y } \hat{8} \\ \hat{6} \text{ y } \hat{2} \end{cases}$$

En cursos anteriores de matemática se demostró que:

- Los ángulos alternos internos son iguales:

$\hat{4} = \hat{5}$ y $\hat{6} = \hat{3}$

- Los ángulos alternos externos son iguales:

$\hat{8} = \hat{1}$ y $\hat{7} = \hat{2}$

- Los ángulos correspondientes son iguales:

$\hat{7} = \hat{3}$ y $\hat{4} = \hat{8}$

$\hat{5} = \hat{1}$ y $\hat{6} = \hat{2}$

- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales:

$\hat{2} = \hat{3}$; $\hat{4} = \hat{1}$; $\hat{6} = \hat{7}$ y $\hat{8} = \hat{5}$

0.3 Teorema de Pitágoras

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, cuyo ángulo recto está en el vértice C de la figura 0.2.

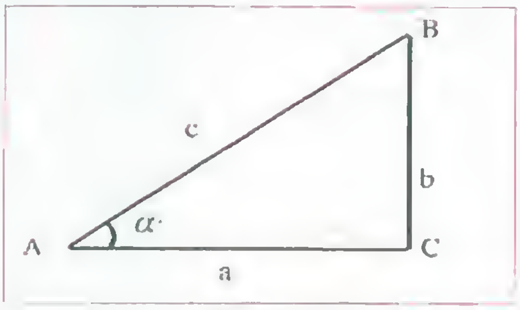


Figura 0.2

En el triángulo de la figura 0.2 se tiene que:

α : es el ángulo agudo

La hipotenusa es AB = c

Los catetos son AC = a y BC = b

Recuerda que la hipotenusa siempre estará opuesta al ángulo recto.

El teorema de Pitágoras nos relaciona las longitudes de los lados de la siguiente forma:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como puede notarse, es posible calcular la longitud de un lado conociendo los otros dos.

Ejercicios

1. Usa el teorema de Pitágoras y calcula la longitud del lado desconocido en cada una de las figuras dadas a continuación:

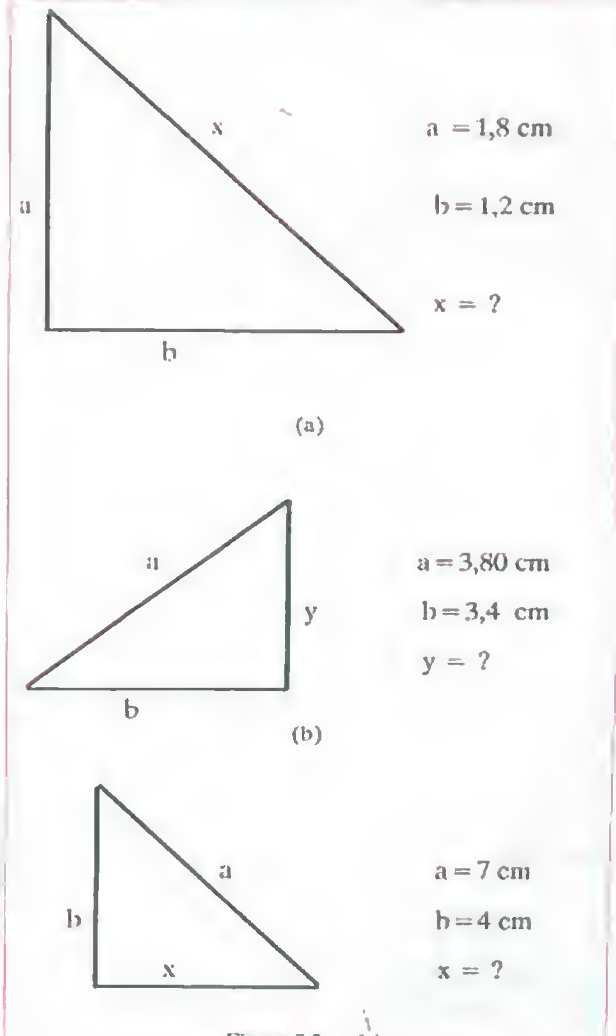


Figura 0.3 (c)

R: a) 2,16 cm b) 1,69 cm c) 5,74 cm

2. Calcular la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 2 cm respectivamente.

R: 5,38 cm

3. Se tiene un cuadrado de 8 cm de lado inscrito en una circunferencia. Calcular el radio de la circunferencia.

R: 5,65 cm

4. Cada lado de un triángulo equilátero mide 8 cm. ¿Cuánto mide la altura de dicho triángulo?.

R: 6,93 cm.

0.4 Trigonometría de los triángulos rectángulos.

La trigonometría estudia las relaciones existentes entre los ángulos y los lados de los triángulos.

Razones trigonométricas de un ángulo

Como la base del estudio de la trigonometría es el ángulo, veamos algunos aspectos relativos a él.

Un ángulo es la porción del plano limitado por dos semirrectas que tienen un origen común.

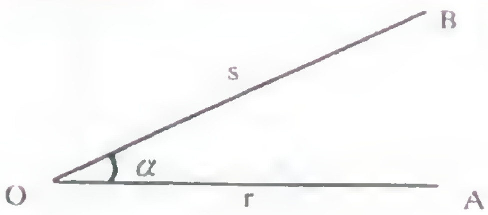


Figura 0.4

En la figura 0.4 el origen O es el vértice del ángulo.

Las semirrectas Or y Os .

Se representa el ángulo mediante las notaciones siguientes:

$$\alpha = \widehat{rOs} = \widehat{rs} = \widehat{AOB}$$

Puede decirse también que el ángulo está generado por una semirrecta que gira sobre un punto O. La posición de OA es la inicial y la posición de OB es la terminal.

Según el sentido del giro podemos decir que:

- Un ángulo es **positivo** si el giro para describirlo es de sentido contrario al de las agujas del reloj.
- Un ángulo es **negativo** si el giro para describirlo es del mismo sentido que el giro de las agujas del reloj.

Consideremos un triángulo rectángulo como el indicado en la figura 0.5, el cual es recto en el vértice C. Sea α el ángulo agudo ubicado en el vértice A.

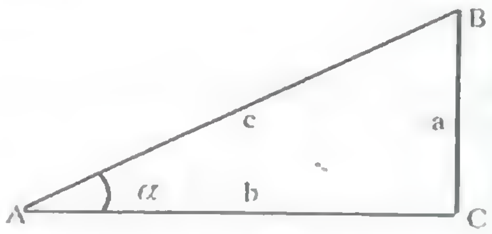


Figura 0.5

Existen tres funciones trigonométricas o razones trigonométricas comunes de un ángulo. A todo ángulo le corresponde un número, obtenido como cociente entre las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Para el ángulo α estos cocientes son expresados de la siguiente forma:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno } \alpha = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1

En el triángulo de la figura 0.6 calcular las longitudes x e y sabiendo que $\alpha = 30^\circ$ y $z = 8$ cm.

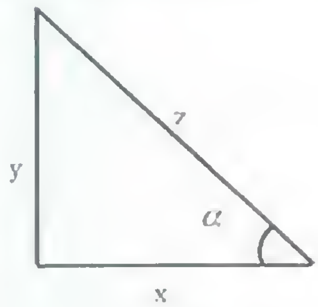


Figura 0.6

Solución

Apliquemos las definiciones dadas en el triángulo de la figura 0.6.

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{z}$ de donde

$y = z.\operatorname{sen} \alpha = 8 \text{ cm} . \operatorname{sen} 30^\circ$

$y = 8 \text{ cm}. 0,5$

$\boxed{y = 4 \text{ cm}}$

$\cos \alpha = \frac{x}{z}$ de donde

$x = z.\cos \alpha = 8 \text{ cm} . \cos 30^\circ$

$x = 8 \text{ cm} . 0,86$

$\boxed{x = 6,88 \text{ cm}}$

Ejemplo 2

Hallar el valor del ángulo en cada caso:

a) Si $\operatorname{sen} \alpha = 0,7896$

$\alpha = 52^\circ 8'53"$

b) Si $\cos \alpha = 0,866$

$\alpha = 30^\circ 0'10"$

c) Si $\tan \alpha = 2,050$

$\alpha = 63^\circ 59'48"$

d) Si $\cos \alpha = 0,4342$

$\alpha = 64^\circ 15'56"$

Comprueba los resultados haciendo uso de tu calculadora.

Ejercicios.

1. Dada una razón trigonométrica, encuentra en cada caso el valor del ángulo . Usa tu calculadora.

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,6018$ b) $\cos \alpha = 0,7071$

c) $\operatorname{tag} \alpha = 1,22$ d) $\operatorname{sen} \alpha = 0,1736$

e) $\cos \alpha = 0,8988$ f) $\operatorname{tag} \alpha = 0,7002$

g) $\operatorname{sen} \alpha = 0,1821$ h) $\cos \alpha = 0,2618$

2. Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 20°. Si la longitud de la hipotenusa mide 6 cm, calcular las longitudes de los otros dos lados.

R: 2,052 cm y 5,638 cm

3. Calcular en cada caso el valor del ángulo y el lado desconocido.

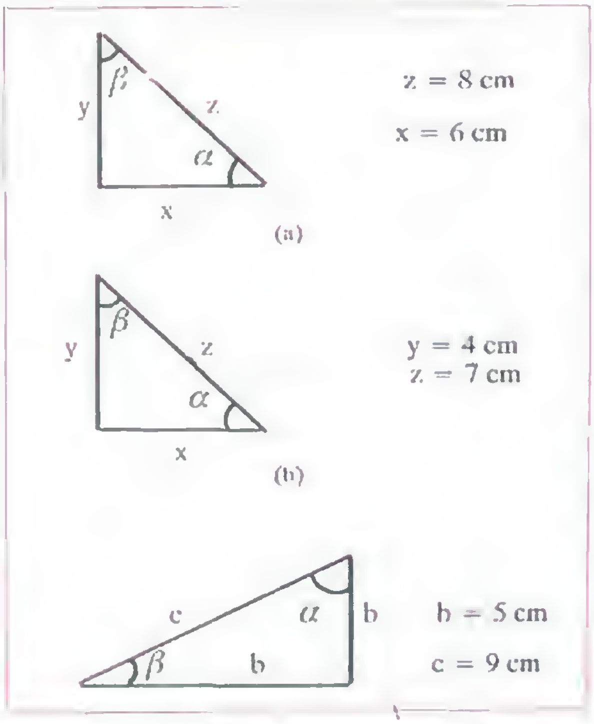


Figura 0.7 (c)

Respuestas

a) $y = 5{,}29$ cm $\alpha = 41^{\circ}\ 24'34{,}64'$

$\beta = 48^{\circ}\ 35'25{,}36''$

b) $x = 5{,}74$ cm $\alpha = 34^{\circ}\ 50'59{,}66''$

$\beta = 55^{\circ}\ 9'$

c) $a = 7{,}48$ cm $\beta = 56^{\circ}\ 15'3{,}64''$

$\alpha = 33^{\circ}\ 44'56{,}36''$

0.5 Ley de los cosenos

Cuando se emplea la trigonometría del triángulo rectángulo dos de los lados del triángulo deben ser perpendiculares entre sí.

A veces se nos presenta el caso donde debemos trabajar con un triángulo no rectángulo. Para ello debemos recurrir a la **ley de los cosenos**, la cual es aplicable a todos los triángulos, sean rectángulos o no. Su enunciado es como sigue:

En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

Si observamos la figura 0.8 podemos escribir para cada lado las siguientes expresiones:

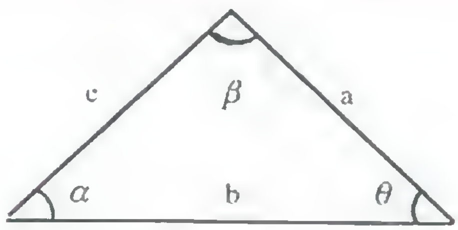


Figura 0.8

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

0.6 Ley de los senos

La ley de los senos es también aplicable a todos los triángulos y su enunciado es como sigue:

En un triángulo cualquiera, la razón de un lado al seno del ángulo opuesto es constante

Si usamos la figura 0.8 podemos escribir que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\theta}$$

0.7 Vectores

Las **magnitudes escalares** son aquellas que quedan completamente especificadas mediante un número seguido de la unidad correspondiente. La longitud, la temperatura, la masa, la densidad, el tiempo, el volumen, la superficie son ejemplos de magnitudes escalares.

Las magnitudes vectoriales se caracterizan porque además de su módulo es necesario especificar su dirección y sentido. Son magnitudes vectoriales: la fuerza, la velocidad, el desplazamiento, la cantidad de movimiento, la aceleración, etc.

Las magnitudes vectoriales se representan mediante **un vector**, el cual se define como **un segmento de recta orientado y dirigido, que tiene un origen y un extremo**. En la figura 0.9 se representa un vector de origen A y extremo B.

Figura 0.9

La recta que contiene al vector origina la **dirección**.

La orientación de la recta definida por el origen y el extremo del vector determina **el sentido**.

La cantidad de veces que contiene la unidad es la longitud del vector, la cual recibe el nombre de **módulo del vector.**

Observaciones importantes

A las magnitudes vectoriales las denotaremos con una letra en **negrilla**. Así, en la figura 0.9 se tiene:

AB se lee vector de origen A y extremo B.

a se lee vector a.

El módulo de un vector se indica con barras verticales

|**AB**| : se lee módulo del vector AB.

También se usa escribir sin negrillas cuando se trate de módulo de un vector. Así por ejemplo

AB: se lee módulo de **AB**.

0.8 Clases de vectores.

Vectores fijos o ligados. Son aquellos que tienen un punto de aplicación fijo en el espacio. Estos quedan definidos por sus tres componentes cartesianas y por las tres componentes de su punto de aplicación. Una fuerza que actúa sobre una partícula dada posee un punto de aplicación bien definido que es la propia partícula.

Vectores deslizantes. Son los vectores cuyo punto de aplicación se puede desplazar sobre la recta de acción donde están apoyados. En la figura 0.10 el punto de aplicación A del vector **AB** ha sido trasladado al punto de aplicación A' del vector **A'B'**.

Nótese que se ha trasladado sobre la misma recta de acción.

Figura 0.10

Vectores libres. Son el conjunto de vectores que tienen la misma dirección, magnitud y sentido, pero diferentes rectas de acción (fig 0.11).

Figura 0.11

Estos vectores pueden ser trasladados paralelos a sí mismos, teniendo como origen cualquier punto del espacio. Si un cuerpo rígido realiza un movimiento de traslación rectilínea, todas las partículas tienen velocidades de la misma dirección magnitud y sentido, por lo que la velocidad del cuerpo puede representarse por el vector libre que tiene magnitud, dirección y sentido igual a los de la velocidad de una cualquiera de las partículas.

Vectores polares. Son aquellos cuyas magnitudes que representan están ligadas a una traslación. El vector velocidad lineal es un vector polar.

Vectores axiales. Son aquellos cuyas magnitudes que representan están ligados a una rotación. El vector velocidad angular es un vector axial (fig 0.12) porque puede rotar alrededor de un eje y es perpendicular al plano de rotación.

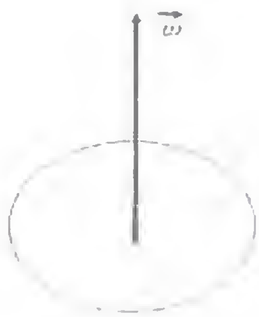


Figura 0.12

Vectores opuestos. Son dos vectores tales que, teniendo el mismo módulo y la misma dirección, tienen sentidos opuestos. En la figura 0.13 el vector **a** es opuesto al vector -a.

Figura 0.13

Vectores unitarios. Son vectores sin dimensión, cuyo módulo es igual a la unidad, los cuales son empleados para especificar una dirección dada. Ellos no tienen otro significado físico, simplemente se usan por conveniencia para describir una dirección en el espacio.

Vectores paralelos. Son dos vectores tales que, teniendo la misma dirección y sentido sus magnitudes son proporcionales. En la figura 0.14 se muestran dos vectores paralelos.

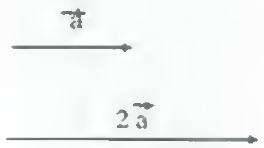


Figura 0.14

Versores fundamentales. Son los vectores unitarios (de magnitud igual a 1) cuyas direcciones y sentidos coinciden con los ejes coordenados. Ellos constituyen un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares, los cuales serán representados de la manera siguiente: **i**, **j**, **k**, con **i** sobre el eje X, **j** sobre el eje Y, y **k** sobre el eje Z. Obsérvese la figura 0.15.

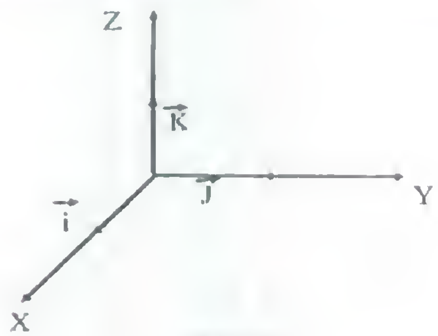


Figura 0.15

0.9 Direccion de un vector en el plano

La dirección de un vector es el ángulo que él forma con respecto a un eje de referencia.

Un método usado para dar la dirección de un vector se refiere a las direcciones convencionales: norte, sur, este y oeste. Así, por ejemplo, en la figura 0.16 se muestran varios vectores en un plano.

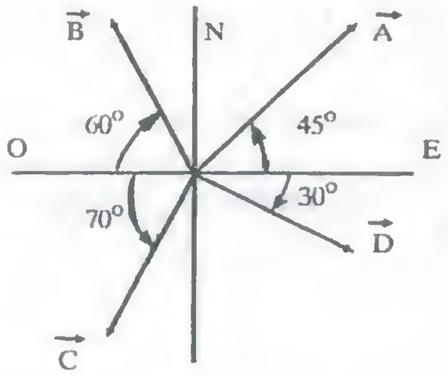


Figura 0.16

El vector **A**, de magnitud igual a 8 unidades, está ubicado 45° al norte del este.

El vector **B**, de magnitud igual a 7 unidades, está localizado 60° al norte del oeste.

El vector **C**, de magnitud igual a 5 unidades, está ubicado 70° al sur del oeste.

El vector **D**, de magnitud igual a 6 unidades, está ubicado 30° al sur del este.

* Coordenadas polares de un vector

Otro método usado para especificar la dirección de un vector consiste en hacer uso de dos líneas perpendiculares entre sí, a las cuales llamaremos **ejes**. La línea horizontal recibe el nombre de **eje X** y la línea vertical recibe el nombre de **eje Y**.

En este caso la **dirección de un vector** se define como el ángulo medido en sentido contrario al avance de las manecillas de un reloj, desde la dirección positiva del eje x.

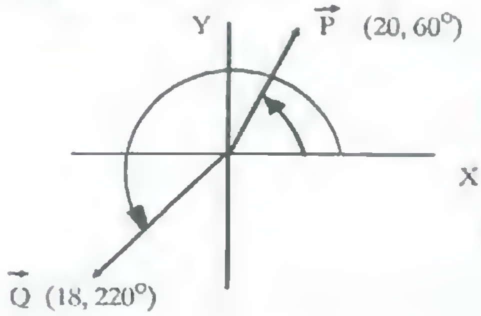


Figura 0.17

En la figura 0.17 se tienen los siguientes vectores:

P: de magnitud 20 unidades y dirección 60^o.

Q: de magnitud 18 unidades y dirección 220^o.

Esta forma de expresar un vector, con sus unidades de magnitud (valor absoluto) y el ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje x le llamaremos **coordenadas polares de un vector.**

Así, los vectores **P** y **Q** de la figura 0.17 expresados en coordenadas polares son:

$P = (20, 60^o)$

$Q = (18, 220^o)$

En general, si $|\mathbf{R}|$ es el valor absoluto de un vector y θ es la dirección, puede escribirse el vector **R** en **coordenadas polares** así:

$$R = (|R|, \theta).$$

0.10 Componentes rectangulares de un vector.

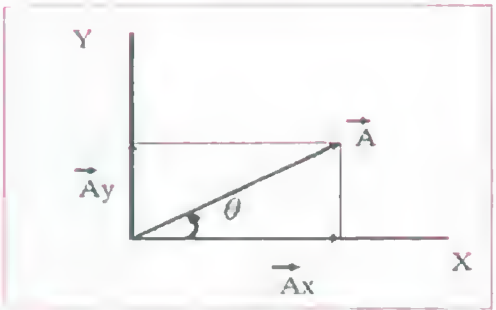


Figura 0.18

Consideremos el vector A en el plano xy, tal como lo muestra la figura 0.18. Dicho vector tiene su origen ubicado en el origen del sistema de coordenadas rectangulares y forma un ángulo con el eje positivo de las x. Si desde el extremo de A, se trazan sus proyecciones sobre los ejes, se obtienen dos componentes:

$\vec{A}_x$: componente de $\vec{A}$ en la dirección de x

$\vec{A}_y$: componente de $\vec{A}$ en la dirección de y.

Las componentes x e y del vector $\vec{A}$ vienen dadas en módulo así:

$$A_x = |A|.\cos\theta = A.\cos\theta$$
$$A_y = |A|.\text{sen}\,\theta = A.\text{sen}\,\theta$$

Es necesario hacer notar que las componentes de un vector en las direcciones de los ejes son las longitudes de A_x y A_y y por lo tanto se comportan como cantidades escalares, ya que para especificarlas en cualquier sistema de coordenadas de un referencial dado sólo interesa un número con el signo algebraico.

La longitud o magnitud de un vector, en función de sus componentes viene dado por:

$$|A| = A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

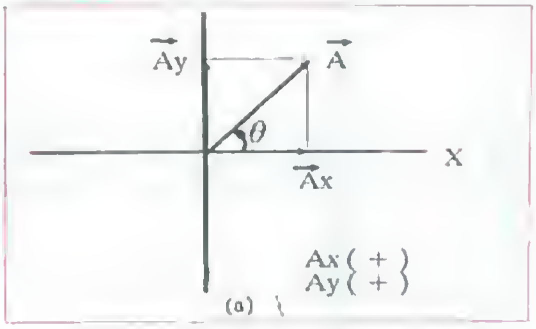
La dirección del vector viene dada por el ángulo que forma dicho vector con la dirección positiva del eje x, medido en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj.

Este ángulo puede calcularse por la relación:

$$\tan\theta = \frac{|A_y|}{|A_x|}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|A_y|}{|A_x|}$$

En general, los signos de las componentes rectangulares de un vector dependen del cuadrante donde él esté localizado. En la figura 0.19 se muestra un resumen de los signos de las componentes de un vector A cuando se ubica en los diferentes cuadrantes.



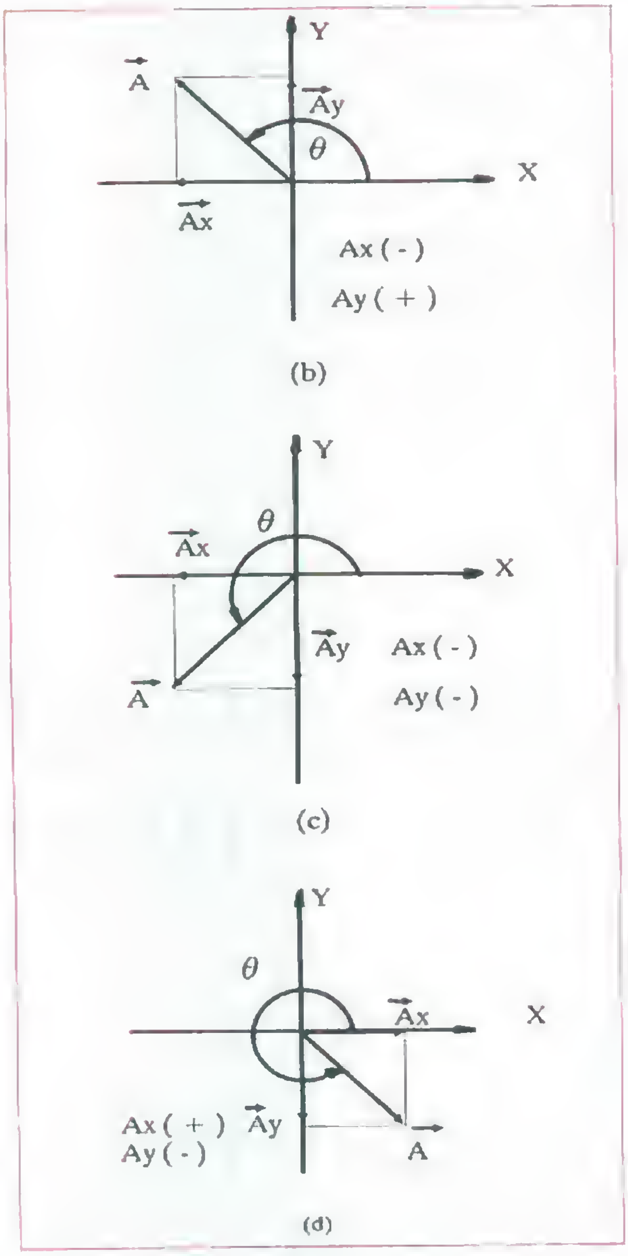


Figura 0.19

Paso de coordenadas rectangulares a polares

Un vector, expresado en coordenadas rectangulares puede ser expresado en coordenadas polares o viceversa. Para ello nos referiremos al siguiente ejemplo:

Sea el vector $\vec{A}$ dado por sus coordenadas cartesianas $\mathbf{A} = (4{,}3)$. Expresemos dicho vector en coordenadas polares.

Sabemos que el vector $\vec{A}$, expresado en coordenadas polares viene dado por $(|\mathbf{A}|, \theta)$, donde $|\mathbf{A}|$ es la magnitud de dicho vector y θ es el ángulo que dicho vector forma con la dirección positiva del eje x, medido en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj.

La magnitud la calculamos así:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$$

$$\boxed{|\mathbf{A}| = 5.}$$

El ángulo se calcula por la relación:

$$\tan\theta = \frac{|A_y|}{|A_x|} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\theta = 36^\circ\ 52'\ 11''}$$

Luego el vector **A** expresado en coordenadas polares es:

$$\boxed{\mathbf{A} = (5,\ 36^\circ\ 52'11'')}$$

Paso de coordenadas polares a rectangulares

Recíprocamente, un vector expresado en coordenadas polares puede ser expresado en coordenadas rectangulares con solo calcular sus componentes en las direcciones de los ejes.

Sea el vector $\mathbf{R} = (\ 8\ ,\ 132^\circ\ )$ el cual está representado en la figura 0.20.

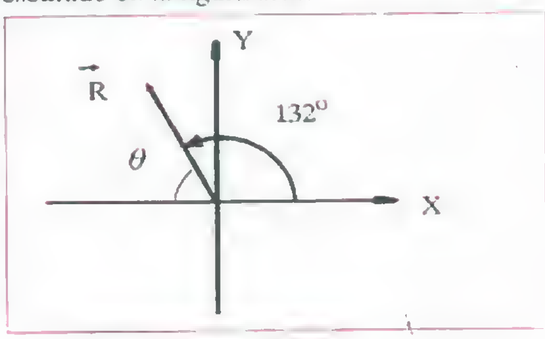


Figura 0.20

Calculemos las **componentes** en las direcciones de los ejes.

Como el ángulo polar es mayor de 90^o usaremos como auxiliar el ángulo θ, el cual se obtiene así:

$$\theta = 180^o - 132^o = 48^o$$

Las componentes en las direcciones de los ejes vendrán dadas por:

$$R_x = |\mathbf{R}| . \cos\theta$$

$$R_x = -8 . \cos 48^o$$

$$\boxed{R_x = -5{,}35}$$

$$R_y = |\mathbf{R}| . \operatorname{sen}\theta$$

$$R_y = 8 . \operatorname{sen} 48^o$$

$$\boxed{R_y = 5{,}95}$$

El vector $\mathbf{R} = (8, 132^o)$ expresado en coordenadas polares se transforma en $\mathbf{R} = (-5{,}35 ; 5{,}95)$ expresado en coordenadas cartesianas.

0.11 Expresión analítica de un vector en el plano en función de los vectores unitarios

Consideremos un vector **V**, el cual está ubicado en el plano xy de la figura 0.21.

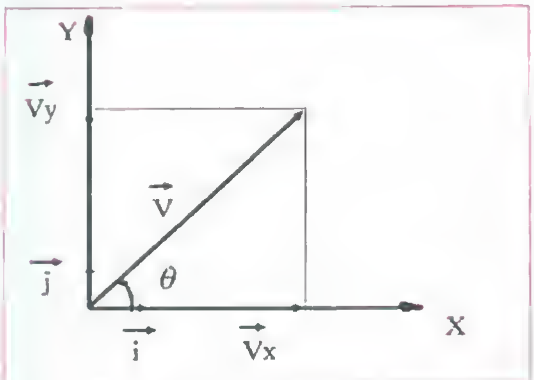


Figura 0.21

El producto de la componente V_x y el vector unitario **i** es el vector V_x**i**, el cual es paralelo al eje x con magnitud V_x.

De la misma forma V_y**j** es un vector de magnitud V_y paralelo al eje y.

De esta manera, en términos de los vectores unitarios se puede escribir el vector **V** así:

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j}$$

Esta última es la **expresión analítica del vector en función de los vectores unitarios i,j**. Esto no debe ser confundido con A_x y A_y, las cuales se refieren siempre a las componentes de **A** en las direcciones de los ejes.

Consideremos **V** y **R** dos vectores dados por sus componentes rectangulares de la manera siguiente: $\mathbf{V} = (2,5)$ y $\mathbf{R} = (-3,4)$.

La expresión analítica en función de los vectores unitarios para cada uno de ellos es:

$$\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{R} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

Ejemplo

Dado el vector de origen A(2,1) y extremo B(3,3), escribir el vector **AB** en función de los vectores unitarios **i**, **j**. Encontrar también la dirección del vector $\mathbf{AB} = \mathbf{V}$ (figura 0.22)

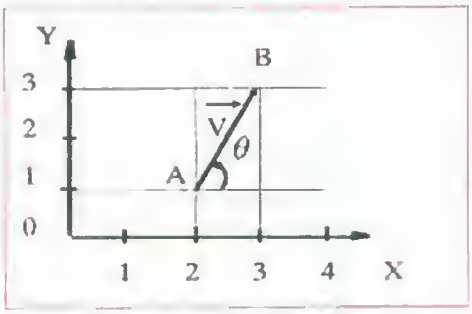


Figura 0.22

Solución

Las coordenadas del vector **AB** vienen dadas así:

AB(3-2 , 3-1)

AB(1,2)

La componente x del vector **AB** se ha obtenido restando la componente x del extremo B, menos la componente x del origen A.

La componente y del vector **AB** se ha obtenido restando la componente y del extremo B, menos la componente y del origen A.

El vector **AB** puede escribirse en función de sus vectores unitarios así:

$$\mathbf{AB}(1,2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

El módulo de **AB** viene dado por:

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

La dirección del vector **AB** = **V** es el ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, desde la dirección positiva del eje x. Este ángulo puede calcularse por la relación:

$$\tan\theta = \frac{|V_y|}{|V_x|}$$

$$\tan\theta = 2/1$$

$$\theta = 63^\circ\, 26'5{,}82''$$

0.12 Expresión analítica de un vector en el espacio

Un vector en el espacio viene representado por tres componentes sobre los ejes. Sea **V** un vector que se encuentra en el espacio y sean α, β y θ los ángulos que forma el vector con los semiejes positivos X, Y, Z.

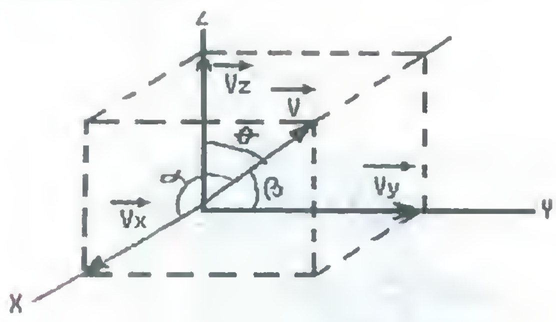


Figura 0.23

Los cosenos de los ángulos α, β y θ los llamaremos **cosenos directores del vector**, llamados así porque fijan la dirección del vector **V** en el espacio. Ellos quedan determinados a través de las relaciones siguientes:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{|\mathbf{V}|}$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{|\mathbf{V}|}$$

$$\cos\theta = \frac{V_z}{|\mathbf{V}|}$$

El vector **V** puede ser escrito en función de los vectores unitarios así:

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

en donde **i**, **j**, **k** son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes.

Los números V_x, V_y, V_z son conocidos como **las componentes cartesianas del vector.**

La magnitud del vector viene dada por la expresión:

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2}$$

La magnitud de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes

Ejemplo

Un vector **V**(x, y, z) tiene como componentes (3, -2, 1).

Hallar: a) su magnitud b) los cosenos directores.

Solución

a) En la figura 0.24 se ha representado el vector **V**(3,-2,1).

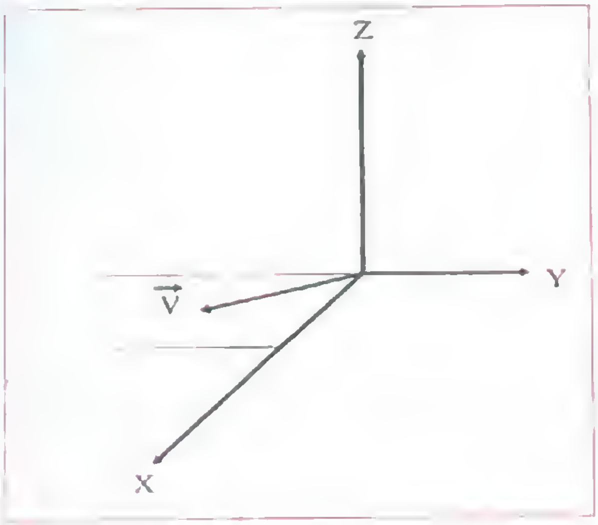


Figura 0.24

Su magnitud viene dada por:

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{14} = 3{,}74$$

b) Los cosenos directores los obtenemos así:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{|\mathbf{V}|} = \frac{3}{3{,}74} = 0{,}8$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{|\mathbf{V}|} = \frac{2}{3{,}74} = -0{,}53$$

$$\cos\theta = \frac{V_z}{|\mathbf{V}|} = \frac{1}{3{,}74} = 0{,}27$$

0.13 Vector unitario de un vector dado

El vector unitario de un vector dado es otro vector cuyo módulo es la unidad, y su dirección y sentido es el del vector del que es unitario.

Si **U** es el vector unitario y **V** un vector cualquiera puede decirse como **norma general** que el vector **V** puede ser expresado como producto de su módulo por el vector unitario:

$\mathbf{V} = |\mathbf{V}|.\mathbf{U}$ en donde el vector unitario queda expresado como:

$$\boxed{\mathbf{U} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}}$$

Esta expresión se lee **vector unitario en la dirección de V.**

Ejemplo

Dado el vector **V** = -3**i** + 5**j** - 2**k** hallar un vector unitario en la dirección de **V**

Solución

Debemos calcular el módulo de **V**

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{9 + 25 + 4}$$

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{38.}$$

Luego el vector unitario **U** en la dirección de **V** es:

$$\mathbf{U} = \frac{-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{38}$$

$$\mathbf{U} = \frac{-3}{\sqrt{38}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{38}}\,\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{38}}\,\mathbf{k}$$

0.14 Operaciones con vectores

Suma de vectores. Método analítico

Sean **A** y **B** dos vectores dados por sus expresiones analíticas. Su suma es:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$

Esto se traduce diciendo:

La suma analítica de varios vectores es igual a la suma de las componentes de los vectores en cada eje.

Resta de vectores. Método analítico.

La resta o diferencia $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ de los vectores A y B viene dada por:

$$\mathbf{D} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j} + (A_z - B_z)\mathbf{k}$$

Ejemplo

Sean los vectores siguientes:

$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\quad \mathbf{B} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Hallar: a) A + B b) A - B c) Un vector unitario en la dirección de A + B d)La dirección de A + B.

Solución

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) - (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$.

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

c) Para encontrar un vector unitario en la dirección de A + B aplicamos la definición:

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

Encontremos $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 9^2}$$

$$= \sqrt{49 + 4 + 81}$$

$$= \sqrt{134}$$

Luego:

$$\mathbf{U} = \frac{7}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} - \frac{9}{\sqrt{134}}\mathbf{k}$$

d) Para encontrar la dirección de A + B es necesario calcular los cosenos directores de los ángulos:

$$\cos\alpha = \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_x}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{134}}$$

$$\boxed{\alpha = 52^\circ\ 47'\ 32''}$$

$$\cos\beta = \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_y}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{134}}$$

$$\boxed{\beta = 80^\circ\ 3'\ 3''}$$

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{A} + \mathbf{B})_z}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$$

$$\cos\theta = -\frac{9}{\sqrt{134}}$$

$$\boxed{\theta = 141^\circ\ 1'\ 50''}$$

Observación

Haz como ejercicio la dirección de A - B

Suma y resta de vectores conociendo sus módulos y direcciones en el plano X,Y

Consideremos dos vectores A y B como los indicados en la figura 0,25(a), cuyas magnitudes son 10 y 20 unidades respectivamente, orientados

formando ángulos de 30° y 120° respecto del sentido positivo del eje x.

Hallar la magnitud de **A** + **B** y **A** - **B**

Calcular también las direcciones.

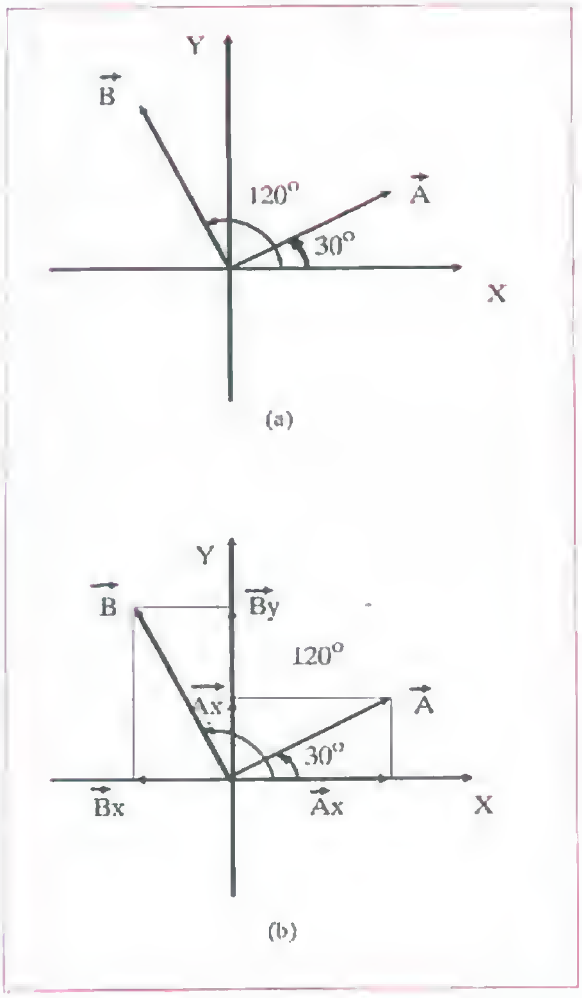


Figura 0.25

Solución

Sabemos que:

$|\mathbf{A}| = 10$ y $|\mathbf{B}| = 20$.

Las componentes de los vectores **A** y **B** en las direcciones de los ejes se muestran en la figura 0.25(b).

Calculemos las **magnitudes de las componentes:**

Sobre el eje x

$A_x = |\mathbf{A}|.\cos\ = 10.\cos 30°.$

$\boxed{A_x = 8{,}66}$

$B_x = |\mathbf{B}|.\cos\ = 20.\cos 120°$

$\boxed{B_x = -10.}$

$C_x = A_x + B_x = 8{,}66 - 10$

$\boxed{C_x = -1{,}34}$

Sobre el eje y

$A_y = |\mathbf{A}|.\text{sen}\ = 10.\text{sen } 30°$

$\boxed{A_y = 5}$

$B_y = |\mathbf{B}|.\text{sen } 120° = 20.\text{sen } 120°.$

$\boxed{B_y = 17{,}32}$

$C_y = A_y + B_y = 5 + 17{,}32$

$\boxed{C_y = 22{,}32.}$

El vector suma **C** vendrá expresado en forma analítica así:

$\mathbf{C} = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j}$

$\mathbf{C} = -1{,}34\mathbf{i} + 22{,}32\mathbf{j}.$

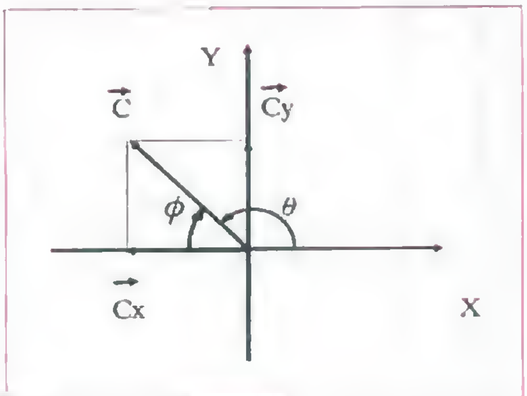


Figura 0.26(a)

La figura 0.26(a) muestra el vector **C**, suma de los vectores C_x y C_y.

Como la componente x de **C** es negativa está representada sobre el eje x hacia la izquierda a partir del origen.

Como la componente y de C es positiva está representada sobre el eje y hacia arriba a partir del origen.

La magnitud de C viene dada por:

$$|C| = \sqrt{(C_x)^2 + (C_y)^2}$$

$$= \sqrt{(-1{,}34)^2 + (22{,}32)^2}$$

$$= \sqrt{499{,}8}$$

$$\boxed{|C| = 22{,}36}$$

La dirección de C viene dada por el ángulo medido en el sentido contrario a las agujas del reloj desde la dirección positiva del eje x. Para ello calculemos primero el valor del ángulo ø usando la tangente:

$$\tan\phi = \frac{|C_y|}{|C_x|}$$

$$\tan\phi = \frac{22{,}32}{1{,}34}$$

$$\boxed{\phi = 86^\circ\ 33'\ 51''}$$

El ángulo θ medido contra las manecillas del reloj a partir de la dirección positiva del eje x nos dará la dirección de C y viene dado por:

$$\theta = 180^\circ - 86^\circ\ 33'\ 51''$$

$$\boxed{\theta = 93^\circ\ 26'\ 9''}$$

Encontremos ahora la diferencia **A - B**, la cual llamaremos **D**

$$D_x = (A_x - B_x)i + (A_y - B_y)j$$

$$= (8{,}66 - (-10))i + (5 - 17{,}32)j$$

$$\boxed{D = 18{,}66i - 12{,}32j}$$

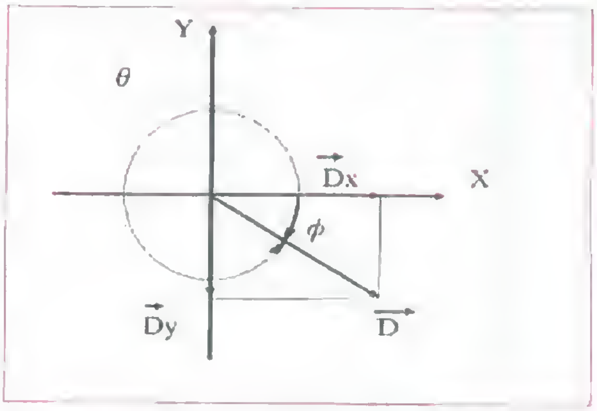


Figura 0.26(b)

La figura 0.26(b) muestra el vector diferencia **D**.

Como la componente x de **D** es positiva está ubicada sobre el eje x hacia la derecha.

Como la componente y de **D** es negativa está ubicada hacia abajo sobre el eje y.

La magnitud de D viene dada por:

$$|D| = \sqrt{(D_x)^2 + (D_y)^2}$$

$$= \sqrt{(18{,}55)^2 + (-12{,}32)^2}$$

$$\boxed{|D| = 22{,}26}$$

Para obtener **la dirección** del vector **D** (fig 0.26(b)), debemos calcular primero el valor del ángulo ϕ :

$$\tan\phi = \frac{|D_y|}{|D_x|}$$

$$\tan\phi = \frac{12{,}32}{18{,}66}$$

$$\boxed{\phi = 33^\circ\ 26''\ 32''}$$

El ángulo θ medido contra las manecillas del reloj a partir de la dirección positiva del eje x nos dará la dirección de **D**.

Este vector está ubicado en el cuarto cuadrante por lo que su dirección viene ubicada así:

$$\theta = 360^{\circ} - 33^{\circ}\,26'\,32''$$

$$\theta = 326^{\circ}\,33'.$$

Suma y resta de vectores conociendo el módulo y el ángulo que forman entre sí.

*** Suma**

Consideremos dos vectores coplanarios (que están ubicados en un mismo plano) de magnitudes $|V_1|$ y $|V_2|$ los cuales forman entre sí un ángulo que llamaremos α, tal como se muestra en la figura 0.27(a).

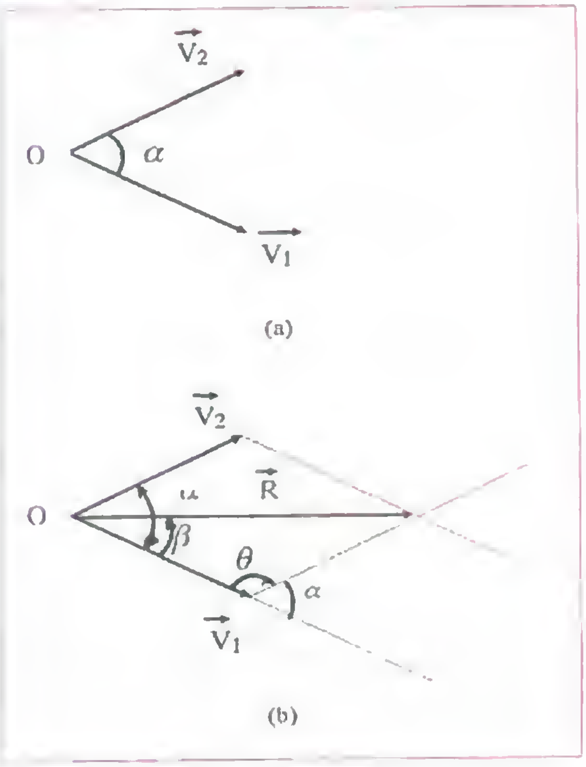


Figura 0.27

Para obtener la magnitud de **R**, tal como se muestra en la figura 0.27(b), trazamos por el extremo de V_1 una paralela a V_2 y por el extremo de V_2 una paralela a V_1. El punto de corte de las paralelas será el extremo del vector resultante **R** que tiene su origen en "O".

Si detallamos la figura notamos que **R** es la diagonal del paralelogramo. A este proceso se le llama **regla del paralelogramo.**

Por trigonometría sabemos que la magnitud de **R** puede calcularse usando el teorema del coseno, pudiéndose escribir que:

$$|R| = \sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2 - 2V_1V_2\cos\theta}$$

El ángulo ß que forma V_1 con **R** es la dirección de **R** y puede obtenerse por la ley de los senos:

$$\frac{|R|}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{|V_2|}{\operatorname{sen}\beta}$$

Despejando sen β nos queda:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{|V_2|.\operatorname{sen}\theta}{|R|}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,sen}\frac{|V_2|.\operatorname{sen}\theta}{|R|}$$

*** Resta o diferencia**

En la figura 0.28 se tienen dos vectores V_1 y V_2.

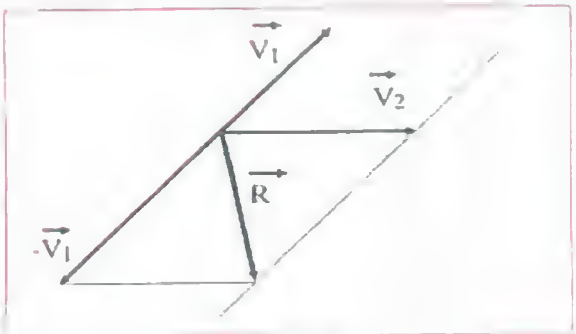


Figura 0.28

Para hallar la diferencia $V_2 - V_1$ trazamos el opuesto de V_1, el cual llamaremos $(-V_1)$ y luego sumamos $V_2 + (-V_1)$. Para ello usamos la regla del paralelogramo, obteniéndose la resultante **R**.

$$\mathbf{R} = V_2 + (-V_1).$$

Ejemplo 1

Consideremos dos fuerzas, como las indicadas en la figura 0.29, las cuales forman entre sí un ángulo de 30° y cuyos módulos son F = 60 N y P = 40 N.

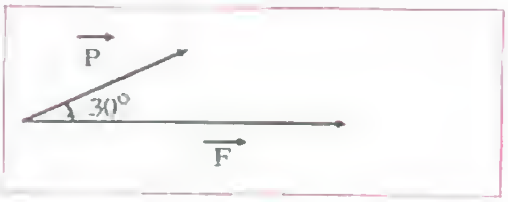


Figura 0.29

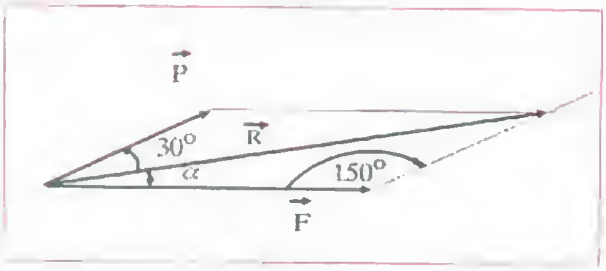


Figura 0.30

Observa en la figura 0.30 que por el extremo de **P** hemos trazado una paralela a **F**, y por el extremo de **F** hemos trazado una paralela a **P**. La resultante **R** es la diagonal del paralelogramo que va desde el punto común de los vectores **F** y **P**, hasta el punto donde se cortan las paralelas.

La magnitud de **R** se determina por la ley de los cosenos:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{F^2 + P^2 - 2FP\cos 150^\circ}$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(60N)^2 + (40N)^2 - 4800.\cos 150^\circ}$$

$$|\mathbf{R}| = 96{,}73\ N.$$

La dirección de **R** queda determinada al obtener el valor del ángulo α. Este se obtiene usando la ley de los senos:

$$\frac{|\mathbf{P}|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|\mathbf{R}|}{\operatorname{sen} 150^\circ}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\mathbf{P}|.\operatorname{sen} 150^\circ}{|\mathbf{R}|}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{40N.\operatorname{sen} 150^\circ}{96{,}73N}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0{,}206761$$

$$\boxed{\alpha = 11^\circ\ 55'\ 57''}$$

Este es el ángulo que forma **R** con la dirección de **F**.

En caso de ser los vectores perpendiculares, el ángulo que ellos forman es de 90° y el teorema del coseno puede ser escrito así:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{F^2 + P^2 - 2FP.\cos 90^\circ}$$

Como $\cos 90^\circ = 0$ nos queda que:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{F^2 + P^2}$$

Esta última expresión no es más que el teorema de Pitágoras.

0.15 Método de las componentes

Cuando dos o más vectores tienen un punto común de aplicación el cálculo de la resultante se hace sencillo cuando dichos vectores forman un ángulo recto. En este caso bastará aplicar el teorema de Pitágoras.

Cuando no están en ángulo recto, uno respecto de otro, el cálculo de la resultante se hace un poco más difícil. Para ello debemos recurrir al **método de las componentes**.

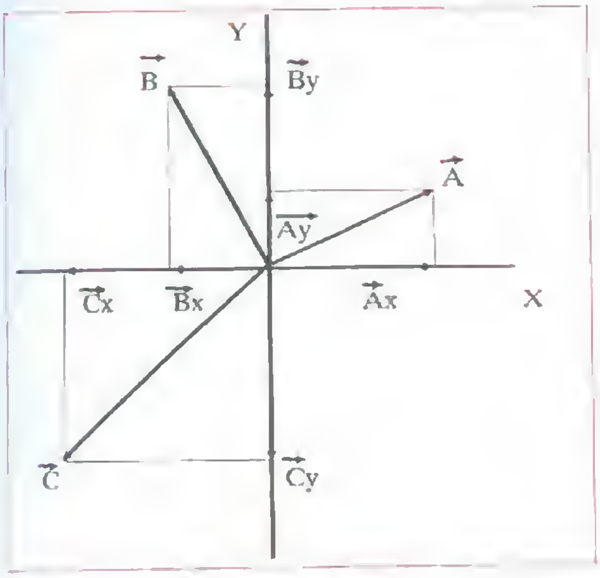


Figura 0.31

Tratemos de entender el método considerando la figura 0.31, en la cual se muestran tres vectores **A**, **B** y **C**. Veamos los pasos siguientes:

1. Se selecciona un sistema de ejes coordenados (x,y) y a partir del origen se dibujan todos y cada uno de los vectores **A**, **B** y **C** que se van a sumar.

2. Se calculan las componentes en las direcciones de los ejes x,y de todos los vectores.

3. Se encuentra la componente "x" de la resultante, haciendo la suma algebraica de las componentes en x de todos los vectores. (Recordemos que las componentes dirigidas hacia la derecha son positivas y las componentes dirigidas hacia la izquierda son negativas). Obsérvese figura 0.32.

$$R_x = A_x + B_x + C_x$$

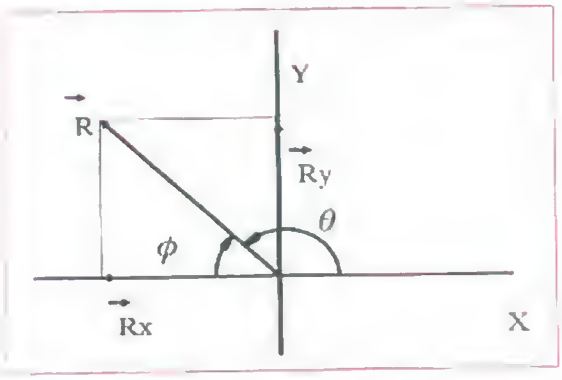


Figura 0.32

4. Se encuentra la componente "y" de la resultante, haciendo la suma algebraica de las componentes en "y" de todos los vectores. (Recordemos que las componentes sobre el eje "y" dirigidas hacia arriba son positivas y las dirigidas hacia abajo son negativas).

$$R_y = A_y + B_y + C_y$$

5. Se obtiene la magnitud de la resultante $|\mathbf{R}|$ a partir de los vectores perpendiculares $\mathbf{R}_x$ y $\mathbf{R}_y$ usando el teorema de Pitágoras.

6. Se obtiene la dirección de la resultante a través de la relación:

$$\tan \phi = \frac{|R_y|}{|R_x|}$$

La dirección de R es el ángulo θ que forma el vector **R**, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la dirección positiva del eje x. Obsérvese la figura 0.32.

$$\theta = 180^{\circ} - \phi$$

Ejemplo.

Tenemos tres vectores de magnitudes $|V_1| = 20$ $|V_2| = 12$ y $|V_3| = 24$ de tal manera que formen con los ejes ángulos $\alpha = 30^{\circ}$, $\beta = 45^{\circ}$ y $\theta = 60^{\circ}$. Observa la figura 0.33

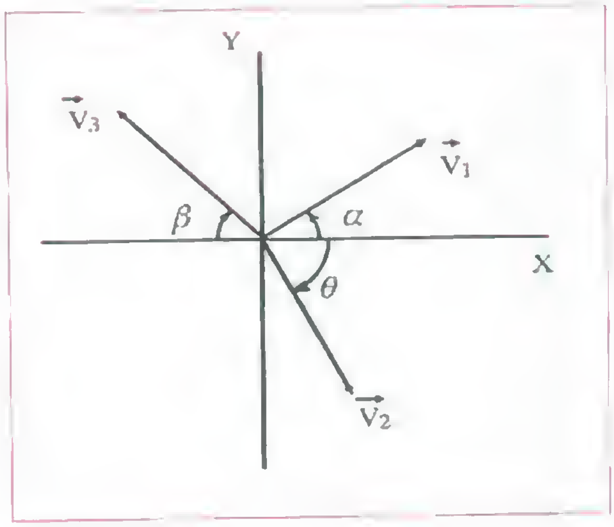


Figura 0.33

Si dibujamos la proyección de cada vector sobre los ejes coordenados encontramos sobre el eje "x" los vectores V_{1x}, V_{2x}, V_{3x} y sobre el eje "y" los vectores V_{1y}, V_{2y}, V_{3y}. Ver figura 0.34)

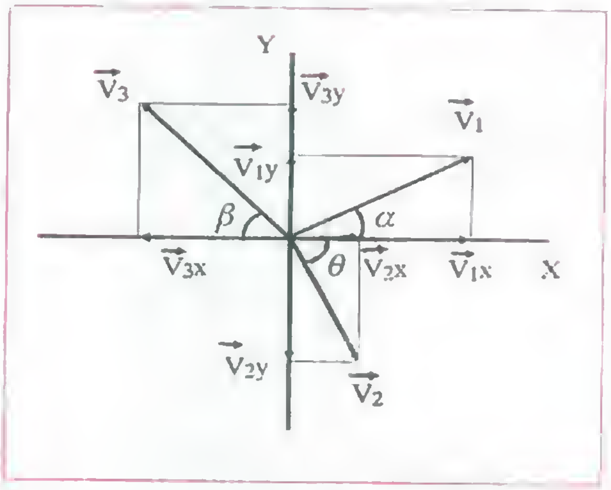


Figura 0.34

Determinemos las magnitudes de las componentes de cada uno de ellos sobre los ejes.

Sobre el eje x

$|V_{1x}| = |V_1|.\cos\alpha$

$|V_{1x}| = 20.\cos 30^o$

$\boxed{|V_{1x}| = 17{,}32}$

$|V_{2x}| = |V_2|.\cos\beta$

$|V_{2x}| = 12.\cos 45^o$

$\boxed{|V_{2x}| = 8{,}49}$

$|V_{3x}| = -|V_3|.\cos\theta$

$|V_{3x}| = -24.\cos 60^o$

$\boxed{|V_{3x}| = -12.}$

Sobre el eje y

$|V_{1y}| = |V_1|.\text{sen}\,\alpha$

$|V_{1y}| = 20.\text{sen}\,30^o$

$\boxed{|V_{1y}| = 10}$

$|V_{2y}| = -|V_2|.\text{sen}\,45^o$

$|V_{2y}| = -12.\text{sen}45^o$

$\boxed{|V_{2y}| = -8{,}49}$

$|V_{3y}| = |V_3|.\text{sen}\,\theta$

$|V_{3y}| = 24.\text{sen}\,60^o$

$\boxed{|V_{3y}| = 20.78}$

La resultante sobre el eje "x" es:

$|R_x| = |V_{1x}| + |V_{2x}| + |V_{3x}|$

$|R_x| = 17{,}32 + 8{,}49 - 12$

$\boxed{|R_x| = 13{,}81}$

La resultante sobre el eje "y" es:

$|R_y| = |V_{1y}| + |V_{2y}| + |V_{3y}|$

$|R_y| = 10 - 8{,}49 + 20{,}78$

$\boxed{|R_y| = 22{,}29}$

La magnitud de la resultante está representada en la figura 0.35

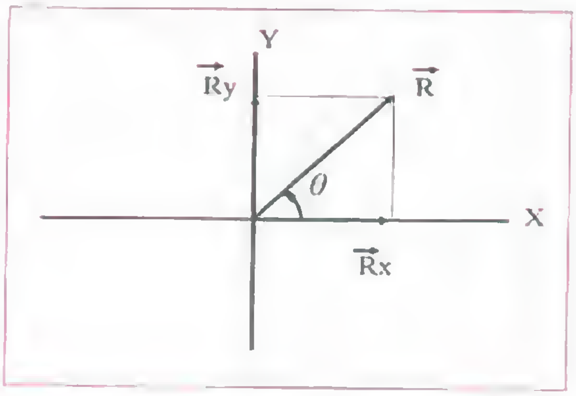


Figura 0.35

La magnitud de R viene expresada por:

$$|R| = \sqrt{|R_x|^2 + |R_y|^2}$$

$$|R| = \sqrt{(13{,}81)^2 + (22{,}29)^2}$$

$$\boxed{|R| = 26{,}22.}$$

La dirección de R viene dada por el ángulo θ medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, medido desde la dirección positiva del eje x.

$$\tan\theta = \frac{|R_y|}{|R_x|}$$

$$\tan\theta = \frac{22{,}29}{13{,}81}$$

$$\boxed{\theta = 58^{o}\ 13'\ 9''}$$

0.16 Producto de un escalar por un vector

Sea **A** un vector y "m" un escalar. El producto del escalar "m" por el vector **A** es otro vector expresado como **mA**, que cumple los siguientes requisitos:

- **mA** tiene la misma dirección y sentido de **A** si m es positivo.
- **mA** tiene la misma dirección y sentido opuesto de **A** si m es negativo.
- El módulo de **mA** es m veces el de **A**.

Ejemplo

Sea m = 3 y sea **A** = 2i - 4j + 3k

mA = 3(2i - 4j + 3k)

mA = 6i -12j + 9k

Si m = -3 se tendrá que:

mA = -3(2i - 4j + 3k)

mA = -6i + 12j - 9k

La magnitud de mA viene dada así:

$$3.|A| = 3 . \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 3^2}$$

$$= 3 . \sqrt{29}$$

0.17 Producto escalar de dos vectores conociendo sus modulos y el ángulo que ellos forman.

Sean **A** y **B** dos vectores. Sea θ el ángulo que ellos forman (fig 0.36.)

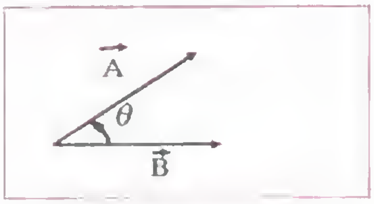


Figura 0.36

El producto escalar de dos vectores **A** y **B** es el escalar que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que ellos forman. Se representa por un punto $\boxed{.}$.

$$A.B = |A|.|B|.\cos\theta$$

Casos particulares

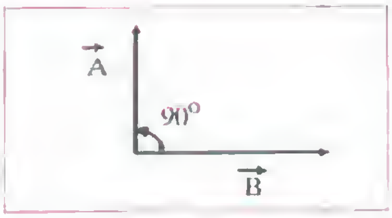


Figura 0.37

Si los vectores **A** y **B** son perpendiculares (fig 0.37), el ángulo que ellos forman es de 90^o. Como $\cos 90^o = 0$ puede escribirse que:

Si $A \perp B$ entonces $A.B = 0$

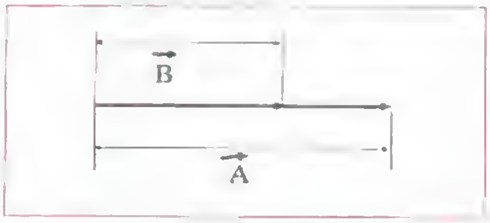


Figura 0.38

Si los vectores **A** y **B** son paralelos (fig 0.38) entonces el producto escalar es máximo porque $\cos 0^o = 1$, luego:

Si $A \parallel B$ entonces $A.B = 1$

Si el ángulo que forman es mayor de 90^o el resultado del producto escalar es un número negativo.

Proyección de un vector sobre la dirección de otro.

Observemos las figuras 0.39 y 0.40

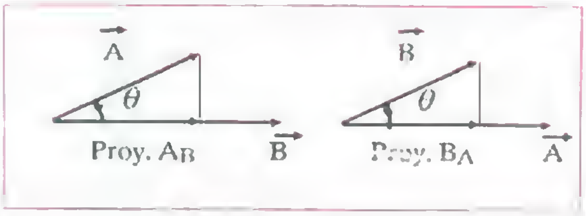


Figura 0.39 Figura 0.40

Usando trigonometría y observando la figura 0.39 podemos escribir la proyección de **A** sobre **B** así:

$$\text{Proy } A_B = |A|.\cos\theta \quad ....(1)$$

De la figura 0.40 podemos escribir que:

$$\text{Proy } B_A = |B|.\cos\theta \quad ....(2)$$

Sabemos por definición de producto escalar que:

$$A.B = |A|.|B|.\cos\theta \quad ....(3)$$

Si dividimos ambos miembros de (3) por el valor absoluto de $|A|$ se tiene que:

$$\frac{A.B}{|A|} = |B|.\cos\theta \quad ....(4)$$

De acuerdo con la expresión (2) el segundo miembro de (4) puede escribirse como:

$$\boxed{\frac{A.B}{|A|} = \text{Proy } B_A \text{ (Proyección de B sobre A)}}$$

Si en la expresión (3) dividimos ambos miembros por $|B|$, tendremos que:

$$\frac{A.B}{|B|} = |A|.\cos\theta \quad ....(5)$$

De acuerdo con la expresión (1) el segundo miembro de (5) puede escribirse como:

$$\boxed{\frac{A.B}{|B|} = \text{Proy } A_B \text{ (Proyección de A sobre B)}}$$

0.18 Producto escalar de los versores

Evaluemos el producto escalar de los versores. Sabemos, que los versores son vectores unitarios en la direcciones de los ejes que tienen módulo igual a 1.

$$i.i = |i|.|i|.\cos 0^o = 1.1.1 = 1$$

De la misma forma ocurre que:

$$j.j = k.k = 1$$

Si evaluamos i.j se tiene:

$$i.j = |i|.|j|.\cos 90^o = 1.1.0 = 0$$

De la misma forma ocurre que:

$$i.j = j.k = 0.$$

Los resultados pueden ser resumidos en la siguiente tabla:

.	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Tabla 0.1

0.19 Producto escalar de dos vectores conociendo sus expresiones analíticas

Consideremos dos vectores dados por sus expresiones analíticas:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

Evaluemos el producto escalar **A.B**

$$\mathbf{A.B} = (A_x\mathbf{I} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}).(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

Aplicando propiedad distributiva y haciendo uso de la tabla anterior (demuéstralo), llegamos a que:

$$\mathbf{A.B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Ejemplo

Dados los vectores **A** y **B** en forma analítica:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{I} + 4\mathbf{J} + \mathbf{K}$$

Hallar:

a) El producto escalar
b) El ángulo que forman
c) La proyección de **A** sobre **B**
d) $|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}|$

Solución

a) El producto escalar de **A.B** viene dado por:

$$\mathbf{A.B} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).(-2\mathbf{I} + 4\mathbf{J} + \mathbf{K})$$

$$= -2 - 8 + 3$$

$$\mathbf{A.B} = -7 \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

b) El ángulo que forman lo obtenemos al aplicar la definición de producto escalar:

$$\mathbf{A.B} = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|.\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|} \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

Evaluemos $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}|$.

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \ldots\ldots\ldots(\mathrm{III})$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}. \ldots\ldots\ldots(\mathrm{IV})$$

Sustituyendo (I), (III) y (IV) en (II) se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{14}\,.\,\sqrt{21}} = \frac{7}{\sqrt{294}}$$

$$\boxed{\theta = 114^\circ\, 5'\, 41''}$$

c) La proyección de **A** sobre **B** se define:

$$\mathrm{Proy}\ \mathbf{A}_{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{A.B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{-7}{\sqrt{21}}$$

d) Evaluemos $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

$$2(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + 3(-2\mathbf{I} + 4\mathbf{J} + \mathbf{K})$$

$$2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} - 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Luego

$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y por lo tanto

$$|2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}| = \sqrt{16 + 64 + 81} = \sqrt{161}$$

0.20 Producto vectorial de dos vectores conociendo sus módulos y el ángulo que forman.

Dados dos vectores cualesquiera **A** y **B**, se define el **producto vectorial** de **A** por **B** y se denota **A x B**, como **otro vector P** que tiene las siguientes características:

a) **El módulo** es igual al producto de los módulos de **A** y **B**, multiplicado por el seno del ángulo que forman sus direcciones.

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|.\text{sen}\,\theta$$

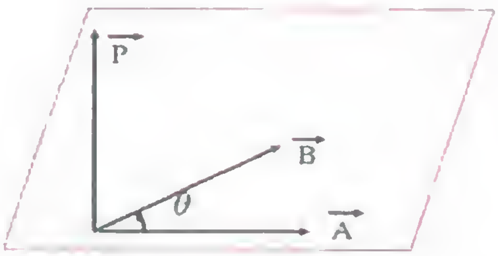


Figura 0.41

b) **La dirección** es un vector **P**, perpendicular al plano determinado por los vectores **A** y **B** (fig 0.41)

c) **El sentido** es el de avance de un sacacorchos que gira del primero al segundo por el camino más corto o el ángulo menor.

Nótese que no es lo mismo **A x B** que **B x A**, que teniendo la misma magnitud tendrán sentidos opuestos. Obsérvese la figura 0.42.

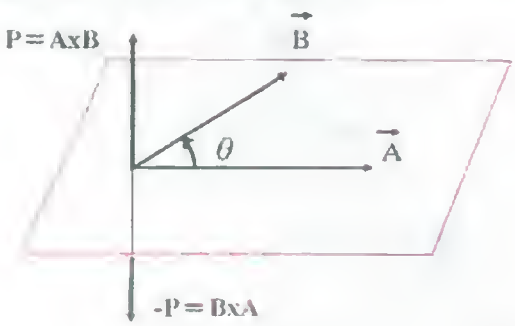


Figura 0.42

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Si aplicamos **la regla de la mano derecha**, en correspondencia con el primer vector, se giran los dedos cerrando la mano, según el ángulo θ. El pulgar extendido da el sentido del producto vectorial (fig 0.43 y 0.44)

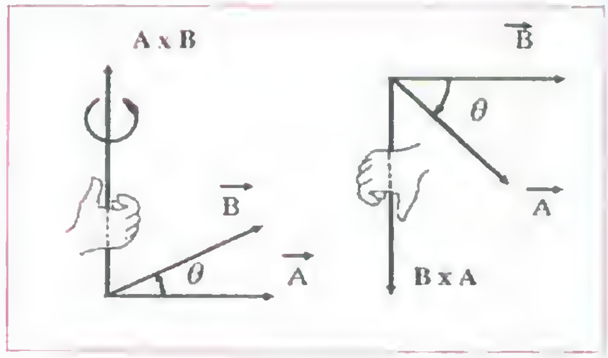


Figura 0.43 Figura 0.44

0.21 Producto vectorial de los versores

Cuando los dos vectores que se multiplican son unitarios, se cumple que:

$$U_1 \times U_2 = \begin{cases} 0 \text{ si } U_1 \parallel U_2 \\ U_3 \text{ si } U_1 \perp U_2 \end{cases}$$

donde U_3 es un vector también unitario perpendicular a ambos, y cuyo sentido viene dado por la regla del sacacorchos.

Aplicando lo anterior a los versores fundamentales i, j, k y observando la figura 0.45 se tendrá que:

$$\mathbf{i}.\mathbf{i} = 0, \qquad \mathbf{j}.\mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{k}.\mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}.\mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$j.i = -k, \qquad k.j = -i, \qquad i.k = -j$

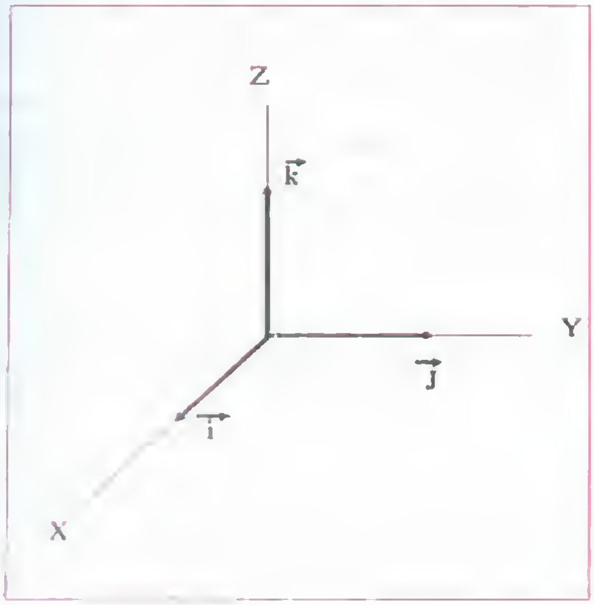


Figura 0.45

Los resultados obtenidos pueden ser resumidos en la siguiente tabla:

.	i	j	k
i	0	k	-j
j	-k	0	i
k	j	-i	0

Tabla 0.2

0.22 Producto vectorial en forma analítica

Sean **A** y **B** dos vectores, dados por sus expresiones analíticas:

$A = A_x i + A_y j + A_z k$

$B = B_x i + B_y j + B_z k$

Evaluemos el producto vectorial **A x B**

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k)$$

Si aplicamos propiedad distributiva y una vez desarrollado usamos la tabla anterior (demuéstralo), llegamos a:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)i + (A_zB_x - A_xB_z)j + (A_xB_y - A_yB_x)k$$

La expresión anterior puede escribirse en forma de determinante, donde la primera fila contiene los vectores unitarios, la segunda y tercera fila son las componentes de los vectores **A** y **B**.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Dados los vectores por sus expresiones analíticas:

$\mathbf{A} = 2i - 3j - k$

$\mathbf{B} = i + 4j - 2k$

Determinar: a) **A x B** b) El ángulo entre **A** y **B**

Solución

$$a)\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante nos queda:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = i\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = i(6 + 4) - j(-4 + 1) + k(8 + 13)$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 10i + 3j + 11k.$

b) Calculemos el ángulo que forman entre sí los vectores.

Para ello usamos la expresión:

$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta$

Despejando sen θ tenemos que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|} \quad \text{.....................................(I)}$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{10^2 + 3^2 + 11^2}$$

$$= \sqrt{230} = 15{,}16 \text{ ....(II)}$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{4 + 9 + 1}$$

$$= \sqrt{14} = 3{,}74 \text{ ....(III)}$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{1 + 16 + 4}$$

$$= \sqrt{21} = 4{,}58 \text{...........................(IV)}$$

Sustituyendo (II), (III) y (IV) en (I) se tiene:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{15{,}16}{3{,}74\,.\,4{,}58} = 0{,}8855$$

$$\boxed{\theta = 62^\circ\ 18'\ 47''}$$

0.23 Producto mixto

Si **A**, **B** y **C** son vectores dados por sus expresiones analíticas, puede demostrarse la siguiente igualdad:

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C}.(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}.(\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

En general:

$$\mathbf{A}.(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1. Dado el vector fuerza, cuyo módulo es 1000 N, calcular el módulo de las componentes sabiendo que el ángulo que dicho vector con la dirección positiva del eje x es 30°.

R: 866 N y 500 N

2. Se tiene un vector velocidad dirigido hacia el norte, cuyo módulo es 12 Km/h y otro vector dirigido hacia el este cuyo módulo es 5 Km/h. Calcular: el módulo, dirección y sentido del vector velocidad resultante.

R: 13 Km/h - 67° 22' 48"

3. Un muchacho hala una cuerda hacia la derecha atada a un cuerpo con una fuerza de 196,2 N, formando un ángulo de 30° con el suelo. Calcular: a) la componente horizontal; b)la componente vertical.

R: a) 169,9 N b) 98,1 N

4. Se tiene un vector fuerza **F** cuyo módulo es 8,9 N. Si la magnitud de la componente horizontal es F_x = 5,7 N, calcular la magnitud de la componente vertical y la dirección de F.

R: 6,83 N - 50° 10' 28".

5. Un ciclista parte de un punto desplazándose 30 Km hacia el este; luego se desplaza 40 Km hacia el norte. Calcular el desplazamiento total y la dirección del desplazamiento.

R: 50 Km - 53° 7' 48"

6. Dos vectores representan fuerzas de módulos F_1 = 5 Kp y F_2 = 8 Kp aplicadas en un punto común. Calcular la magnitud y dirección de la fuerza resultante cuando: a) forman un ángulo de 90°; b) forman un ángulo de 60°.

R: a) 9,43 Kp - 57° 59' 40"

b) 11,36 Kp - 37° 34' 50".

7. Una fuerza de 60 N actúa en dirección de 30° al este del norte, y una segunda fuerza de 60 N actúa en dirección de 60° al oeste del norte. Si esas fuerzas están aplicadas en un mismo punto, calcular: a) la magnitud de la resultante; b) la dirección de la fuerza resultante. (Refiérelo a un eje de coordenadas).

R: a) 84,85 N b) 104° 59' 57"

8. Un avión vuela a 500 Km/h en dirección 30° al norte del oeste. ¿Con qué velocidad se mueve el avión hacia el norte y hacia el oeste?.

R: 433,013 Km/h - 250 Km/h

9. En un plano (X,Y), los puntos origen y extremo de un vector V son A(1,1) y B(4,-3). a) Representa gráficamente dicho vector b) escribe su expresión analítica c) calcula su magnitud d)escribe un vector unitario en la dirección de V.

R: a) 3i - 4j b) 5 c) 0,6i - 0,8j

10. En un sistema coordenado tri-rectangular, los puntos origen y extremo de un vector **F** son P(2,3,0) y Q(0,0,6). a) encuentra las coordenadas de **F** b) escribe la expresión analítica de **F** en función de los versores fundamentales **i, j, k** c) los ángulos directores de F.

R: a) (-2,-3,6) b) -2i - 3j + 6k

c) 106° 36' 6"; 115° 22' 37'; 31°

11. Dado un vector **V** en el plano (X,Y) cuyo módulo es 10 unidades y que forma un ángulo de 30° con el eje X. Determinar la expresión analítica de ese vector.

12. Dado el vector **R** = 3i - 4j en el plano (X,Y), determinar los ángulos α y β que dicho vector forma con los ejes X,Y respectivamente.

R: 53° 7' 48"; 143° 7' 48"

13. Dada una fuerza $\mathbf{F_1}$ = **i - 4j + 2k** (New). ¿Cuál es la expresión analítica de un vector $\mathbf{F_2}$ cuyo módulo es igual a 4 veces el de $\mathbf{F_1}$?.

14. Dadas los vectores siguientes:

$\mathbf{F_1} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

$\mathbf{F_2} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

Determinar:

a) $|\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}|$ b) $|\mathbf{F_1} \times \mathbf{F_2}|$

c) $\mathbf{F_1}.\mathbf{F_2}$ d) El ángulo que forman $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$

R: a) 6,16 b) 27,8 c) -16 d) 119° 55' 10"

15. Dados los vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$, cuyo origen común es el punto A(3,2) y siendo sus extremos los puntos B(1,6) y C(6,7) respectivamente: a) haz la gráfica correspondiente b) determina el vector **r** = $\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2}$ en forma analítica c) halla el ángulo que forma el vector **r** con el eje X.

16. El origen de los vectores $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ es el punto A(1,-1,-3) y sus extremos son respectivamente los puntos B(3,2,3) y C(-1,5,6). Determinar: a) $|\mathbf{E_1}|$ b) $|\mathbf{E_2}|$ c) $|\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}|$

R: a) 7 b) 11 c) 15,29

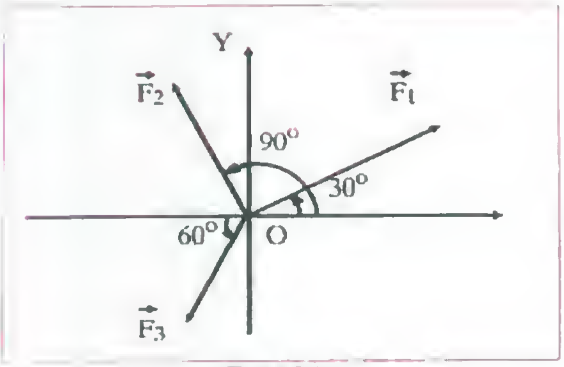


Figura 0.46

17. En la figura 0.46 se dan las fuerzas siguientes:

$|\mathbf{F_1}|$ = 4N, $|\mathbf{F_2}|$ = 30N, $|\mathbf{F_3}|$ = 10N.

Hallar la magnitud de la fuerza resultante.

18. Observa la figura 0.47 que muestra las fuerzas siguientes:

$|\mathbf{F_1}|$ = 4N, $|\mathbf{F_2}|$ = 6N, $|\mathbf{F_3}|$ = 8N

$|\mathbf{F_4}|$ = 2N.

Si α = 30°, hallar la fuerza resultante.

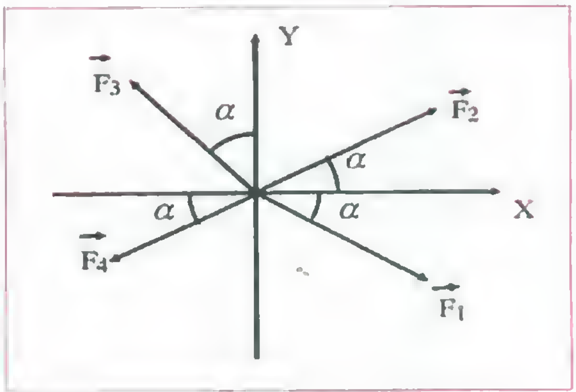


Figura 0.47

19. Se tienen dos fuerzas $|\mathbf{F_1}|$ = 5N y $|\mathbf{F_2}|$ = 8N, formando entre sí un ángulo de 120°. Calcular: a) el módulo de la fuerza resultante. b) El ángulo que forma la resultante con la menor de las fuerzas.

20. Se tienen dos fuerzas concurrentes $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, de módulos 10N y 15N respectivamente, las cuales forman entre sí un ángulo de 60°. Determinar:

a) $|\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}|$

b) $|\mathbf{F_1} - \mathbf{F_2}|$

21. Efectuar las siguientes operaciones:

a) **i.(i + k)**

b)**i.(i - k)**

c) **(i + j).(i - k)**

d) **2i.(3i + j - 4k)**

e) **(2i - j + 3k).(i - 2j - 5k)**

22. Los módulos de dos vectores son 5 y 8 unidades y su producto escalar es 20. ¿Qué ángulo forman entre sí?

R: 60°

23 Dados los vectores siguientes:

$F_1 = i + 3j - 2k$ y $F_2 = 2i + 4j - k$

a) Determinar el ángulo que forman entre sí.

b) Hallar la proyección de F_1 sobre F_2.

R: a) 21° 4' 13,69" b) 16/21

24. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $i \times (i + j)$ b) $i \times (i + j - k)$

c) $k \times (2i - j + 3k)$.

d) $(2i - 3j) \times (i + 3j + 4k)$

R: d) -12i - 8j + 9k

25. Dados los puntos A(3,2,-6) y B(2,9,-6). Determinar: a) los vectores de posición de los puntos A y B. b) el ángulo que forman entre sí c) el producto escalar de **OA** y **OB** d) el producto vectorial de **OA** y **OB**.

R: a) 3i + 2j - 6k y 2i + 9j - 6j

b) 38° 48' 38,57" c) 42i + 6j + 23k

26. Dados los vectores siguientes:

$S = 3i - 4j + 6k$ y $T = 2i - 2j - k$

Determinar: a) el ángulo que forman dichos vectores. c) la proyección de **S** sobre **T**.

27. Dados los vectores siguientes:

$A = 3i - 4j + 6k$ y $B = i - 2k$

Determinar:

a) A x B

b) B x A

c) A x (A x B)

d) A.(A x B)

28. Se dan los siguientes vectores:

$A = 3i - j - 4k \quad B = -2i + 4j - 3k$

$C = i + 2j - k$

Hallar: a) $|3A - 2B + 4C|$ b) un vector unitario en la dirección de $3A - 2B + 4C$.

29. Hallar el valor de "m" para que los vectores: $A = 2i + mj + k$ y $B = 4i - 2j - 2k$ sean perpendiculares.

R: m = 3

30. Dados los vectores

$A = 6i + 2j - 4k$ y

$B = -9i + mj + 6k$.

Calcular el valor de m para que dichos vectores sean: a) perpendiculares b) paralelos.

R: a) 39 b) -3.

31. Dados los vectores $A = mi - 2j + k$ y

$B = 2mi + mj - 4k$. ¿Qué valor debe tener "m" para dichos vectores sean perpendiculares?.

R: 2 y -1.

32. Determínese un vector de módulo igual a 6, perpendicular a los vectores $A = i - j + k$; $B = i + 3j - k$

33. Dos vectores cuyos extremos son A(-3,2,1) y B(5,-3,2) tienen como origen común el punto C(-1,3,0). Calcula su producto escalar y el módulo de su producto vectorial.

34. Se da el siguiente par de igualdades:

$a + b = 7i - j - 2k$

$a - b = -3i - 5j - 4k$

Encontrar: a) los vectores **a** y **b** b) el ángulo formado entre el vector **a** y el vector **a + b**

R: a) a = 2i - 3j - 3k y b = 5i + 2j + k

b) 48° 8' 28"

UNIDAD I

EL ESPACIO Y EL TIEMPO

- Lenguaje descriptivo. Precisión.
- Observador. Sistema de referencia. Espacio y tiempo.
- Longitudes y unidades de medición.
- Sistemas de unidades
- Los fenómenos físicos y la escala del universo.
- Tiempo, unidades y escala de tiempo.
- Lenguaje matemático. Relación entre parámetros.
- Estructura conceptual de la física.
- Actividades y autoevaluación.

UNIDAD 1

EL TIEMPO Y EL ESPACIO

1.1 Lenguaje descriptivo. Precisión.

En física no sólo se observan y describen los fenómenos y propiedades de los cuerpos, sino que se trata de explicarlos. Por ejemplo, si vivimos en un planeta del sistema solar llamado tierra, ¿por qué la luna no cae sobre la tierra?. Preguntas como ésta tienen su explicación científica.

De la misma forma podemos darnos cuenta de ciertos procesos como la sucesión de los días y las noches, las lluvias y las tormentas, las estaciones, el rayo, el trueno, la luz, el sonido, el fuego, etc.

Un análisis más detallado nos lleva a reconocer las semejanzas y diferencias en los animales y las plantas, a clasificar las rocas y los minerales que constituyen la corteza terrestre y a identificar ciertos movimientos en los cuerpos celestes.

Pero a medida que el ser humano fue descubriendo más al mundo que lo rodeaba, comenzó a preocuparse por el lenguaje que debía utilizar para manifestar sus conocimientos a otros seres humanos, para el bien de la humanidad; pero ese lenguaje no podía ser cualquiera, sino un lenguaje preciso, con términos exactos para cada especialidad, de tal manera que pueda ser entendido por otros. La química, la física, la matemática, la astronomía, la biología, etc, están dotados de un lenguaje y una nomenclatura universal que permite ser interpretado por todos los preocupados por el estudio de la ciencia.

La descripción que se haga puede ser **cualitativa** y **cuantitativa**. Veamos cada una de ellas.

Descripción cualitativa

Cuando describimos algo con palabras, no usando números, se dice que la descripción es **cualitativa**. Por ejemplo, cuando decimos "ese terreno es grande", "la temperatura es baja", "un camión es pesado", estamos haciendo una descripción cualitativa. Es obvio que este tipo de descripción deja muchas preguntas que no se pueden responder. "El terreno es grande", pero ¿es posible construir cinco casas?; "la temperatura es baja", ¿seremos capaces de resistirla?; "el camión es pesado", pero ¿soportarán los cauchos éste peso?. Es evidente, que para responder a éstas preguntas necesitaremos números para ser capaces de establecer comparaciones.

Sin embargo, una descripción cualitativa no es inútil en las aplicaciones de la ciencia. Si introducimos papel de tornasol en un líquido y el papel se torna rojo decimos que el líquido es un ácido. Este dato es cualitativo, no nos indica la fuerza del ácido, sino que es ácido y no alcalino.

Por todo esto, la descripción cualitativa tiene un importante papel en el estudio de la ciencia.

Descripción cuantitativa

En el estudio de la ciencia se exigen comparaciones, y éstas se hacen con mayor exactitud en forma **cuantitativa**, es decir, con números. Si la conexión de un radio a la corriente eléctrica requiere de cierto voltaje para que funcione, será difícil describir esto con palabras. Sin embargo, es más decir que el voltaje tiene que ser 120 voltios. La comparación se realiza, por tanto, leyendo la etiqueta que trae el equipo y el voltaje que existe. La descripción cuantitativa es más precisa que una descripción cualitativa y ésa es su ventaja.

¿La descripción cuantitativa tiene limitaciones?. ¿Hay casos en que debemos hacer las cosas en forma cuantitativa y no cualitativamente?.

Por ejemplo, si tenemos un frasco de colonia y deseamos hacerle una descripción, sólo podemos hacerla en forma cualitativa, porque sería imposible asignarle un número a esa fragancia. Lo mismo ocurriría con los sabores, resultaría difícil describirlos en forma cuantitativa, asignándole números. En la mayoría de los casos usamos palabras como agradable, desagradable, agrio etc.

La descripción cuantitativa es numérica y debe fundamentarse en medidas. La descripción

cualitativa se fundamenta generalmente en un juicio, en las características y propiedades de un suceso, sin importar las relaciones matemáticas y las mediciones.

Veamos algunos de los métodos de la descripción **cuantitativa**, entre los que mencionaremos las tablas de datos y las gráficas.

Tablas de datos

Es un conjunto completo de números (datos) organizados para evitar confusiones. En la siguiente tabla se presenta el desplazamiento y el tiempo de un móvil en su movimiento:

t (seg)	0	1	2	3	4
d (m)	0	10	20	30	40

Tabla 1.1

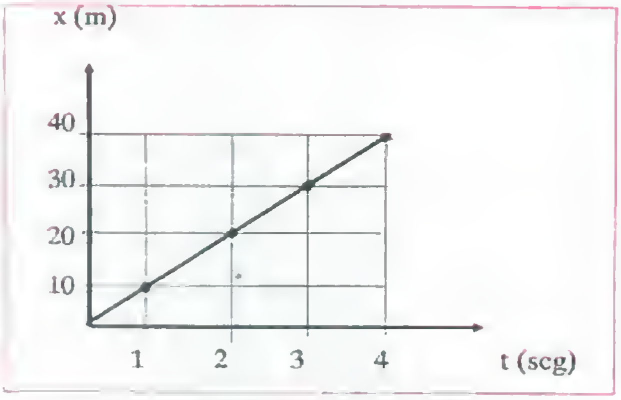


Figura 1.1

Gráficas

Para representar gráficamente los datos de la tabla se pueden usar círculos, barras, líneas. Esta última, como se indica en la figura 1.1 es el tipo más común de gráfica, la cual consiste en un dibujo lineal sobre una cuadrícula rectangular.

La gráfica lineal de la figura 1.1 describe la distancia recorrida por el móvil en la unidad de tiempo.

Las gráficas presentan las siguiei

a) Por simple inspección es posible captar toda la información y ver cómo están relacionadas las variables.

b) Es más compacta, permitiéndonos realizar comparaciones con más facilidad.

c) Es posible dar una conclusión sin tener que examinar una larga lista de números.

Nótese que la figura 1.1 contiene en los ejes la información que necesitamos leer. En el eje horizontal está el tiempo en segundos y en el eje vertical está la distancia en metros.

Cada eje lleva una serie de números igualmente espaciados (escala).Por último, la gráfica debe tener una leyenda que indica lo que se está representando.

1.2 Observador. Sistema de referencia.

Tratemos de analizar un poco el siguiente aspecto:

Imaginémonos que una persona A está en un asiento de un autobús en movimiento, otra persona B camina dentro del autobús y una tercera persona C está en la parada, fijo a tierra. Para el observador A, él está en reposo respecto al asiento del autobús, pero B está en movimiento respecto a él. Para el observador C, la persona A y el autobús se mueven respecto a él porque cambian de posición.

Como puede notarse, la descripción de los eventos o sucesos se llevan a cabo desde el punto de vista que ocupa un observador usado como referencia. De aquí la idea de sistema de referencia.

Un sistema de referencia es un punto respecto del cual se hacen las descripciones de fenómenos o sucesos de la naturaleza.

El sistema de referencia es el sistema cartesiano, ya sea en dos o en tres dimensiones. Este debe tener: un origen, una unidad arbitraria, dos sentidos para cada dimensión y debe regirse por el siguiente principio matemático: " a cada punto debe corresponderle un par ordenado de números (dos dimensiones) o una terna ordenada de números (tres dimensiones).

Por otra parte, cualquier línea (sea recta o curva) debe poder expresarse mediante una ecuación matemática.

Estudio de los sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas consiste en un marco de referencia y las instrucciones que nos

permitan ubicar la partícula en relación al marco de referencia.

Espacio unidimensional

En este espacio la posición queda determinada por una coordenada específica.

Consideremos una recta horizontal que llamaremos **eje de abscisas**, sobre la cual elegiremos un punto que llamaremos **origen** (0). A partir de ese punto consideremos divisiones de igual longitud, (1 cm por ejemplo) que estarán situadas tanto a la derecha como a la izquierda del origen. Ver figura 1.2

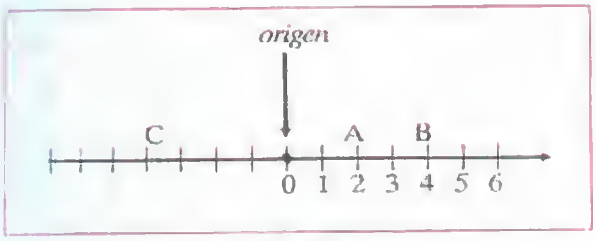


Figura 1.2

Si consideramos el origen como nuestra casa, y en la escala cada división representa 1 Km, diremos que a la derecha de nuestra casa (punto B) está situada la parada del autobús a una distancia de 4 Km. Hacia la izquierda, a 4Km, estará ubicado el supermercado, el cual está representado por el punto C.

Como puede notarse, hemos seleccionado la casa como **origen del sistema de referencia**. A partir de dicho origen se han tomado las distancias hacia la derecha y hacia la izquierda sobre el eje que llamamos "X" y a cada uno de los números los llamamos **coordenadas del punto**, indicándolas así: A(2); B(4) y C(-4). Ver figura 1.2.

Espacio bidimensional

Consideremos ahora dos ejes: uno horizontal (eje x) y otro vertical (eje y). Dichos ejes son perpendiculares entre sí, y constituyen un **sistema de coordenadas cartesianas**. El punto de intersección de los ejes se llama **origen del sistema de coordenadas**.

El eje "X" recibe el nombre de **eje de abscisas** y el eje "Y" recibe el nombre de **eje de ordenadas**.

Son positivos todos los valores a la derecha del origen sobre el eje de las abscisas y hacia arriba sobre el eje de las ordenadas.

Son negativos todos los valores a la izquierda del origen sobre el eje de las abscisas y hacia abajo sobre el eje de las ordenadas. Ver figura 1.3

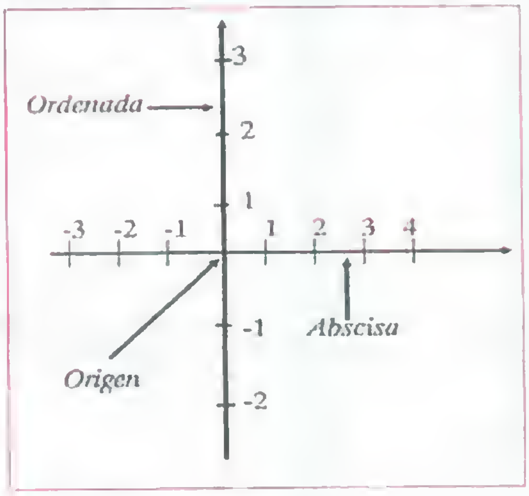


Figura 1.3

Posición de un punto sobre un plano

Tratemos de ubicar puntos en un eje de coordenadas, espacio de dos dimensiones. Observemos la figura 1.4

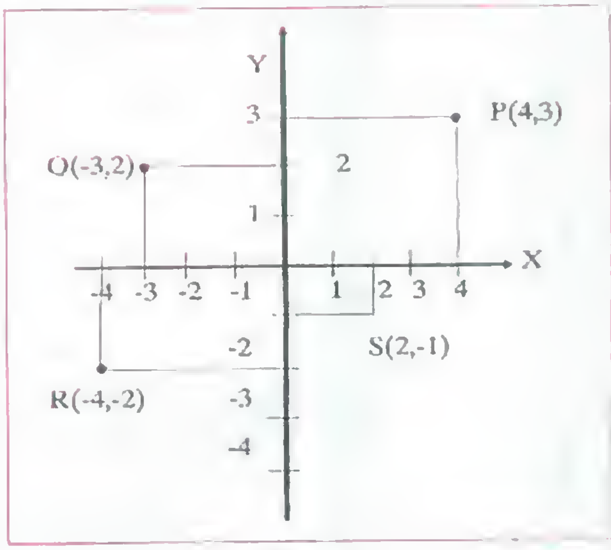


Figura 1.4

Si deseamos conocer la posición del punto P(4,3), bastará con trazar perpendiculares a los ejes desde la abscisa 4 y desde la ordenada 3. El punto donde se corten dichas perpendiculares representa el punto P(4,3).

Recíprocamente, a cada punto del plano le corresponde un par de números reales (x,y). Estos son obtenidos trazando las proyecciones del punto sobre los ejes coordenados.

Obsérvese que el punto O tiene de abscisa -3 y de ordenada 2. Todo punto como (0,3) que tiene abscisa cero, está situado sobre el eje de las ordenadas. Todo punto como (3,0) que tiene de ordenada 0, está ubicado sobre el eje de las abscisas.

Espacio tridimensional

Para ubicar puntos en un espacio tridimensional se necesitan tres coordenadas, las cuales están representadas por tres ejes perpendiculares (X,Y,Z), tal como se indica en la figura 1.5.

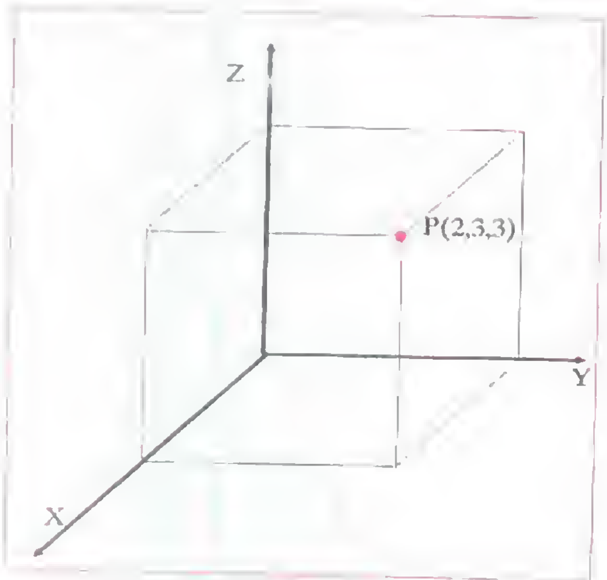


Figura 1.5

En la figura 1.5 está representado el punto P(2,3,3), donde 2 es la abscisa, 3 la ordenada y 3 es la cota. Esta última es la distancia desde el punto P al plano (X,Y).

Para ubicar el punto P(2,3,3) se procede de la siguiente manera:

Desde $x = 2$ se traza una paralela al eje "Y" y desde $y = 3$ se traza una paralela al eje "X". Desde el punto de intersección S, ubicado en el plano (X,Y), se mide la altura $z = 3$ hasta encontrar el punto P.

1.3 Conceptos fundamentales de la física.

Dentro de la física existen ciertas nociones o conceptos físicos de los cuales tenemos una idea intuitiva, puesto que si nos piden una definición no sabríamos darla, pero 'sí estamos en capacidad de explicarla, aun cuando sea con un ejemplo. Estos conceptos son: **espacio, materia y tiempo.**

Se consideran fundamentales porque ante cualquier situación o hecho están presentes al menos uno de ellos. A cada uno de estos conceptos fundamentales se les asignará una **propiedad básica** que los caracteriza; así:

Concepto	Propiedad
Espacio	Longitud
Tiempo	Intervalo de duración
Materia	Masa

Tabla 1.2

Tratemos de ver muy brevemente el significado de cada uno de estos conceptos.

- **Espacio.**

La palabra espacio implica otros conceptos secundarios como lo son la distancia y la longitud. Así, por ejemplo, una longitud constituye un espacio unidimensional(una dimensión); dos longitudes constituyen un espacio bidimensional (dos dimensiones), y tres longitudes constituyen un espacio tridimensional (tres dimensiones).

- **Materia.**

Es todo aquello que constituye el universo, siendo el éxito más grande de la física el estudiar todos aquellos procesos que se llevan a cabo en el interior de los átomos. A la materia se le asigna **la masa** como su propiedad básica. Esta se define como la cantidad de materia que posee un cuerpo.

- **Tiempo**

El tiempo es considerado como el intervalo de duración de un fenómeno. Así, por ejemplo, el intervalo transcurrido entre el momento de la luz de un relámpago y el momento del sonido del trueno.

Existen intervalos de tiempos tan largos o tan cortos que se imposibilita medirlos directamente, razón por la cual los físicos han ideado procedimientos indirectos para obtenerlos.

1.4 Longitud y unidades de medición.

- La medición

Cuando se describe un fenómeno mediante la observación se dice que dicha descripción es incompleta, pues, a través de los años los hombres de ciencia han incurrido en errores por dar demasiado crédito a las observaciones hechas por medio de los sentidos.

Si se desea obtener una información más precisa del fenómeno observado se requiere la medición de la propiedad física, constituyéndose este proceso en la rutina diaria del físico experimental y una de las operaciones más importantes de todo el trabajo científico. Se dice que se ha efectuado una medición cuando se determina: la masa de un objeto, la temperatura de un cuerpo, la cantidad de corriente que circula por un conductor, el intervalo de tiempo de caída de un cuerpo.

Si tenemos dos recipientes llenos de agua a distintos grados de calor, y colocamos las manos dentro de los recipientes, nos daremos cuenta cual de ellos tiene un mayor grado de calor, pero no sabemos cuál es **el valor numérico** de ese grado de calor hasta tanto no usemos el instrumento adecuado para su medición. Al medir la observación realizada, se dice que se ha descrito **cuantitativamente**, es decir, se ha expresado en función de números y unidades. Esta última es la razón por la cual se dice que la matemática es el lenguaje de la física, y sin matemática es imposible la comprensión de un fenómeno físico, tanto desde el punto de vista experimental como teórico.

La medición es una técnica a través de la cual se le asigna un número a una propiedad física, como resultado de comparar dicha propiedad con otra similar seleccionada como patrón, la cual ha sido adoptada como unidad.

El resultado de una medición es un número acompañado de una unidad correspondiente. Así, si se desea medir la longitud del objeto de la figura 1.6, seleccionamos como patrón la unidad S.

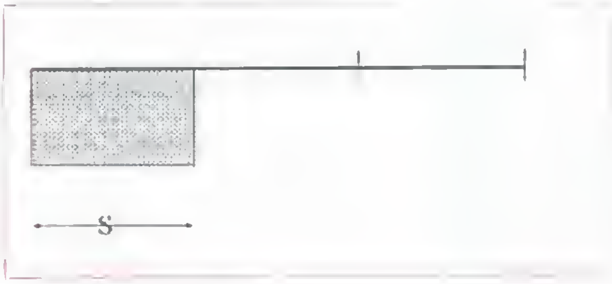


Figura 1.6

Obsérvese que el patrón S está contenido 4 veces en el objeto, diciéndose que la longitud del objeto es 4S.

4: indica las veces que está contenido el patrón S en la longitud medida.

S: es la unidad seleccionada.

- Magnitudes

Una magnitud se define como toda aquella propiedad que puede ser medida

Son magnitudes: **la temperatura, la masa, el tiempo, la longitud, el volumen, la superficie, la velocidad, la fuerza**. Obsérvese que en lenguaje corriente se utilizan frecuentemente expresiones como "medir una varilla". ¿Se puede decir de ello que la varilla es una magnitud física?. La respuesta es negativa, puesto que lo que se hace es la medición de la magnitud **longitud** de la varilla. La magnitud física es la longitud y no la varilla.

- Clasificación de las magnitudes

Las magnitudes para su estudio se clasifican en **fundamentales y derivadas.**

Magnitudes fundamentales. Son aquellas que no provienen de otras magnitudes o que no pueden ser definidas con respecto a las otras magnitudes y con las cuales la física puede ser descrita. La física considera actualmente como magnitudes fundamentales: **la longitud, la masa, el tiempo, la intensidad de la corriente eléctrica, la cantidad de sustancia, la temperatura y la intensidad luminosa.**

Magnitudes derivadas. Son aquellas que provienen de la combinación de las magnitudes fundamentales a través de relaciones matemáticas.

Consideremos un rectángulo en el cual hemos medido dos dimensiones: **largo** = 8 m, **ancho** = 6 m. Nótese que tenemos dos longitudes y cada una de ellas es una magnitud fundamental.

Si calculamos el área del rectángulo se tendrá que:

$$S = L.a = 8\,m \cdot 6\,m$$

$$S = 48\,m^2.$$

Como puede notarse, hemos obtenido una nueva magnitud llamada **superficie**, la cual es el producto de dos longitudes. A esta nueva magnitud se le dice que es una **magnitud derivada.**

Entre otras magnitudes derivadas tenemos: **la velocidad, la fuerza, la aceleración, el trabajo mecánico, la potencia mecánica.**

Unidades.

Cada una de las magnitudes,tanto fundamentales como derivadas posee su correspondiente conjunto de unidades. Esto nos indica que para medir una magnitud se hace necesario el uso de las unidades.

Una unidad es una cantidad arbitraria a la cual se le asigna el valor 1.

- **El metro** es una unidad de la magnitud longitud.
- **El segundo** es una unidad de la magnitud tiempo.
- **El kilogramo** es una unidad de la magnitud masa.
- **El m/s** es una unidad de la magnitud velocidad.
- **El Newton** es una unidad de la magnitud fuerza.
- **El joule** es una unidad de la magnitud trabajo mecánico.

Clasificación de las unidades

Las unidades se clasifican en **fundamentales, derivadas y secundarias.**

Las unidades fundamentales. Son las unidades de las magnitudes fundamentales que, elegidas libremente, se fijan como base del sistema.

Para la magnitud longitud la unidad fundamental es **el metro.**

Para la magnitud masa la unidad fundamental es **el kilogramo.**

Para la magnitud tiempo la unidad fundamental es **el segundo.**

Las unidades derivadas. Son aquellas que provienen de la combinación de las unidades fundamentales.

Al calcular el área de un rectángulo estamos haciendo el producto de dos longitudes expresadas cada una en metros.

$$S = L.a = m \cdot m = m^2$$

Este m^2 obtenido como producto de dos unidades fundamentales se dice que es una **unidad derivada.**

Las unidades secundarias. Son los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales y derivadas.

Recordemos que la magnitud superficie tiene como unidad derivada el m^2. Este tiene múltiplos: dam^2, hm^2, Km^2 y tiene submúltiplos dm^2, cm^2, mm^2. Estos múltiplos y submúltiplos constituyen las unidades secundarias.

- El miligramo es una unidad secundaria, porque es un submúltiplo de la unidad derivada gramo
- El cm/s es una unidad secundaria, porque es un submúltiplo de la unidad derivada m/s. Esta última es una unidad derivada porque es el cociente de dos unidades fundamentales.
- El Km/h es una unidad secundaria, porque es un múltiplo de la unidad derivada m/s.

1.5 Sistemas de unidades.

Si se selecciona una unidad de cada magnitud, tanto fundamental como derivada, es posible formar un conjunto de unidades llamado **sistema de unidades.**

Un sistema de unidades es un conjunto de unidades, formado, tomándose una unidad de cada magnitud.

En física, a lo largo de los años se usaron numerosos sistemas de unidades, pero no fue sino a partir de 1960 cuando un comité internacional se encargó de establecer las reglas para seleccionar un conjunto de patrones, partiendo de las magnitudes fundamentales. El sistema establecido es una adaptación del sistema métrico decimal y recibe el nombre de **Sistema Internacional de unidades**, el cual se abrevia **SI**.

Según el Sistema Internacional, las magnitudes fundamentales de la física son siete, las cuales son mostradas en la siguiente tabla con sus respectivas unidades y símbolos:

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad de corriente	Ampere	A
Temperatura	ºKelvin	ºK
Intensidad luminosa	Candela	cd

Tabla 1.3

Las tres primeras son las magnitudes y unidades usadas en mecánica, razón por la cual se le llama **Sistema M.K.S.** Nótese que son las iniciales de los nombres de las unidades fundamentales

El metro como unidad de longitud

La unidad de longitud en el SI es el metro, pero éste ha tenido modificaciones en cuanto a su definición a través de los años.

- En 1792, cuando en Francia se estableció el sistema métrico, el metro fue definido como 10^{-7} veces la distancia del ecuador al polo norte pasando por París. Esto, dicho en otras palabras, es la diezmillonésima parte de la distancia del polo norte al ecuador a lo largo del meridiano que pasa por París. Este patrón fue desechado por razones eminentemente prácticas.
- Una vez rechazado lo anterior, se adoptó el metro patrón como la distancia comprendida entre dos trazos marcados sobre una barra de platino e iridio, a la temperatura de 0^oC, la cual fue guardada en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sevres, París. De esta manera el metro quedó definido así:

Es la distancia comprendida entre dos trazos marcados sobre una barra de platino e iridio, a **0ºC, que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sevres.**

Hasta 1967 estuvo en vigencia ésta definición, momento en el cual se abandonó el patrón debido a la limitada precisión con que se determinaba la separación entre las marcas, no ser muy accesible y potencialmente destructible. Además no satisface los requerimientos actuales de la ciencia y la tecnología.

- Para comprender la posterior definición del metro, debemos entender que en la teoría ondulatoria la luz es considerada una onda y cada color es una onda de longitud distinta. Obsérvese la figura 1.7.

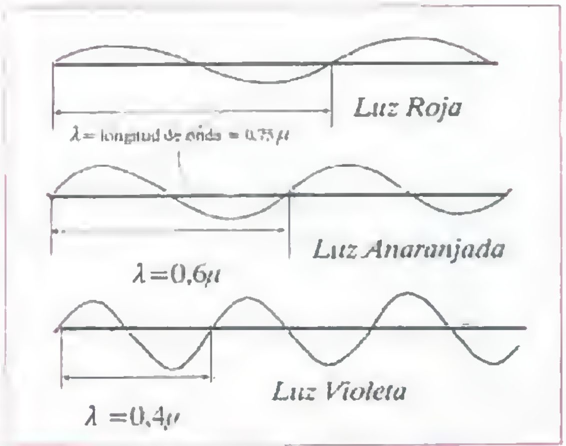


Figura 1.7

Cuando dentro de un tubo (semejante a los de los anuncios luminosos) se coloca un gas llamado kriptón 86 y se le somete a una descarga eléctrica, éste emite luz anaranjada de una longitud de onda fija. De esta manera el metro se definió así:

El metro es la longitud igual a 1.650.763,73 longitudes de onda de la luz anaranjada emitida por el kriptón 86 cuando se somete a una descarga eléctrica.

- En 1983, se establece una nueva definición:

El metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299792458 s.

En la tabla 1.4 se muestran algunas longitudes expresadas en **metros.**

Longitudes	metros
Radio de la galaxia	6.10^{19}
Un año luz	$9,5.10^{15}$
Radio del sol	$6,8.10^{7}$
Radio de la tierra	$6,4.10^{6}$
Longitud de una mosca	5.10^{-3}
Grosor de una página	1.10^{-4}
Tamaño de las células	1.10^{-5}
Tamaño de un virus	$1,2.10^{-8}$
Radio de un átomo	5.10^{-11}
Radio de un protón	$1,2.10^{-15}$

Tabla 1.4

Otros sistemas de unidades.

Existen otros sistemas de unidades, los cuales trabajan con las mismas magnitudes fundamentales: longitud, masa, tiempo, que sólo se diferencian por las unidades que utilizan.

Unidades fundamentales que cada sistema utiliza:

El sistema c.g.s.

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	centímetro	cm
Masa	gramo	gr
Tiempo	segundo	s

El sistema m.k.s.

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s

El sistema técnico

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Fuerza	kilopondio	Kp
Tiempo	segundo	s

El sistema inglés

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	pie	pie
Masa	libra	lb
Tiempo	segundo	s

Múltiplos y submúltiplos en el SI

En la tabla 1.5 se indican los múltiplos y submúltiplos de las unidades, tanto fundamentales como derivadas. Se incluyen además sus símbolos y el número de unidades que indican.

MULTIPLOS			SUBMULTIPLOS		
prefijo	símbolo	magnit.	prefijo	símbolo	magnit.
Exa	E	10^{18}	deci	d	10-1
Peta	P	10^{15}	centi	c	10^{-2}
Tera	T	10^{12}	mili	m	10-3
Giga	G	10^{9}	micro	μ	10^{-6}
Mega	M	10^{6}	nano	n	10-9
Kilo	K	10^{3}	pico	p	10-12
Hecto	H	10^{2}	femto	f	10-15
Deca	da	10	atto	a	10^{-18}

Tabla 1.5

Medida de ángulos

En el proceso de medición de ángulos en un plano existen dos sistemas: **en grados y en radianes.**

En trigonometría, la unidad angular más usada es el grado, en cambio en física gran parte de las ecuaciones están construidas de tal forma que los ángulos deben estar medidos en radianes.

Un ángulo se mide en **radianes** cuando su valor es expresado por la relación entre la longitud de un arco y el radio correspondiente, siendo dicho cociente independiente del radio del círculo seleccionado. La unidad radián no tiene dimensiones, puesto que se trata del cociente entre dos longitudes.

Para expresar un ángulo en radianes se traza con radio arbitrario R un arco s, con centro en el vértice del ángulo, figura 1.8(a)

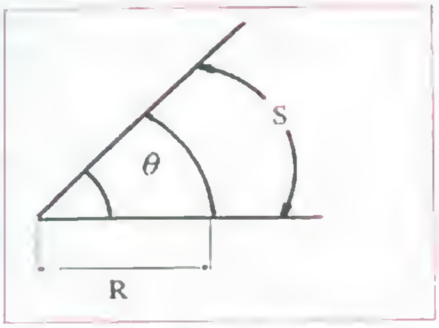


Figura 1.8(a)

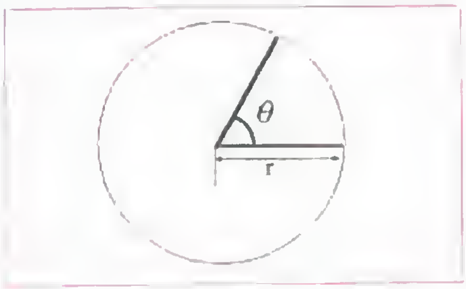


Figura 1.8(b)

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}}$$

Cuando la longitud del arco es igual a la longitud del radio, tal como lo indica la figura 1.8(b), se dice que el ángulo es de **un radián**.

Un radián (rad) es el ángulo cuya longitud de arco es igual al radio.

Si se considera que una vuelta es un ángulo de 360°, en radianes el valor de este ángulo es:

$$2\pi R/R = 2\pi \text{ rad}$$

Luego:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57{,}3^\circ$$

Este último es el valor de conversión entre grados y radianes.

1.6 Notación científica

La notación científica sirve para expresar en forma cómoda aquellas cantidades que son demasiado grandes o demasiado pequeñas. Para entender la forma de escribir los números en notación científica recordemos que los números pueden escribirse en potencias de diez. Aquí haremos lo mismo, con la única diferencia que el primer factor debe ser un número comprendido entre 1 y 10.

Veamos los números siguientes:

a) $54000 \text{ m} = 5{,}4.10^4 \text{ m}$

b) $324 \text{ cm} = 3{,}24.10^2 \text{ cm}$

c) $0{,}00076 \text{ Km} = 7{,}6.10^{-4} \text{ Km}$.

Notese que están escritos como dos factores, el primero de los cuales es un número comprendido entre 1 y 10, y el segundo factor es una potencia de base diez, con exponente positivo o negativo.

- En el primer ejemplo la coma fue desplazada cuatro cifras hacia la izquierda,hasta lograr 5,4 (número comprendido entre 1 y 10). La potencia de base 10 tiene exponente 4 positivo, porque la coma se desplazó 4 cifras hacia la izquierda.
- En el segundo ejemplo la coma fue desplazada dos cifras hacia la izquierda hasta lograr 3,24 (número comprendido entre 1 y 10). La potencia de base 10 tiene exponente 2 positivo, porque la coma se desplazó 2 cifras a la izquierda.
- En el tercer ejemplo la coma fue desplazada hacia la derecha cinco cifras, hasta lograr 7,6 (número comprendido entre 1 y 10). La potencia de base 10 tiene exponente 4 negativo, porque la coma se desplazó 4 cifras hacia la derecha.

En general, la notación científica se define así:

La notación científica es la forma de escribir un número en potencias de base diez como producto de dos factores, siendo el primer factor un número comprendido entre 1 y 10 y el segundo una potencia de base diez.

Forma de expresar un número en notación científica

Tomando en consideración las explicaciones dadas en los ejemplos anteriores, un número puede escribirse en notación científica a través de los siguientes pasos:

- Se desplaza la coma hacia la izquierda o hacia la derecha, de acuerdo al caso, hasta obtener un número comprendido entre 1 y 10.
- El exponente de la base diez queda determinado de acuerdo al número de cifras que la coma se desplazó. Si las cifras las contamos hacia la izquierda el exponente es positivo; en cambio si las contamos hacia la derecha es negativo.

Observa los ejemplos y compara con la regla analizada:

a) 0,000097 cm = $9{,}7.10^{-5}$ cm

b) 0,000462 m = $4{,}62.10^{-4}$ m

c) 5600000 m = $5{,}6.10^{6}$ m

d) 0,726 cm = $7{,}26.10^{-1}$ cm

e) 12 s = 1,2.10 s

f) 956,7 Km = $9{,}567.10^{2}$ Km

Ejercicios

Escribe en notación científica cada una de las siguientes medidas:

a) 188 cm	b) 0,00067 Km
c) 0, 00008 min	d) 1,2 g
e) 0,000276 Kg	f) 5837 h
g) 126400 h	h) 197 Kg
i) 7896000 s	j) 20000 g
k) 0,000257 s	l) 248,3 mm
m) 760 s	n) 0,00028 litros

1.7 Orden de magnitud

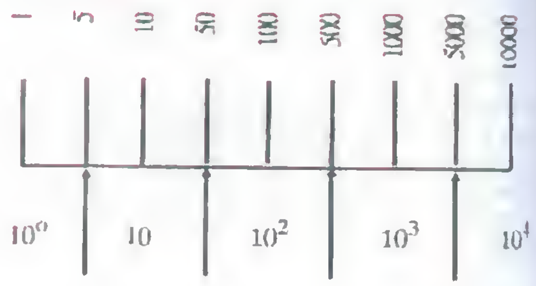


Figura 1.9

Observemos detenidamente la figura 1.9 y analicemos cada una de las siguientes cuestiones:

- El número 4 está más cerca de $10^0 = 1$ que de 10, por lo que se dice que **10^0 es el orden de magnitud del número 4.**

- El número 75, ubicado entre el 50 y el 100, está más cerca de $10^2 = 100$ que de 10. Se dice que **10^2 es el orden de magnitud del número 75.**

- El número 560 está ubicado entre 500 y 1000, está más cerca de $10^3 = 1000$ que de $10^2 = 100$, diciéndose que **10^3 es el orden de magnitud del número 560.**

- El número 46 está ubicado entre 10 y 50, pero está ubicado más cerca de 10 que de $10^2 = 10$. Se dice que 10 **es el orden de magnitud del número 46.**

De acuerdo a las observaciones podemos decir:

El orden de magnitud de un número es la potencia de base diez más próxima a dicho número.

Regla práctica para obtener el orden de magnitud

1. Se escribe el número en notación científica.

2. Si el primer factor es un número menor que 5, el orden de magnitud es la potencia de base diez que aparece como segundo factor.

$2{,}5.10^{-2} \longrightarrow 10^{-2}$

$4{,}9.10^{3} \longrightarrow 10^{3}$

$7.10^{-1} \longrightarrow 10^{-1}$

3. Si el primer factor es mayor que 5, el orden de magnitud será la potencia de base diez in-

mediatamente superior a la que aparece como segundo factor.

$5{,}4.10^2 \longrightarrow 10^3$

$6{,}7.10^4 \longrightarrow 10^5$

$5{,}8.10^{-3} \longrightarrow 10^{-2}$

$7{,}4.10^{-5} \longrightarrow 10^{-4}$

$6.10^{-1} \longrightarrow 10^0$.

Observa que en los tres últimos el exponente es negativo y -2 es inmediatamente superior a -3. -4 es inmediatamente superior a -5 y 0 es inmediatamente superior a -1.

4. En caso de que el primer factor sea igual a 5, el orden de magnitud será indistintamente la potencia de base diez que aparece como segundo factor o la inmediatamente superior.

$5.10^{-2} \longrightarrow 10^{-2}$ ó 10^{-1}

$5.10^4 \longrightarrow 10^4$ ó 10^5

$5.10^6 \longrightarrow 10^6$ ó 10^7

$5.10^{-8} \longrightarrow 10^{-8}$ ó 10^{-7}

Ejercicios

Copia en tu cuaderno el siguiente cuadro y complétalo, colocando la notación científica y el orden de magnitud.

Medición	Notación Científica	Orden de Magnitud
0,00028 m		
1,26 m		
0,966 gr		
19,28 kg		
0,0092 s		
79,2 km		
0,00026 mg		
9,4 kg		
0,00561 cm		
754,2 m		

1.8 Tiempo. Unidad y Escala de tiempo

Para la física el tiempo es un parámetro que se mide con el reloj, el cual sabemos es un dispositivo capaz de contar el número de repeticiones de un movimiento periódico.

Si nos detenemos a pensar en el tiempo lo consideramos como una sucesión de eventos, notándose que éstos ocurren uno a continuación de otro. Esto nos permite darnos cuenta que él parece progresar naturalmente en un sentido y no regresar.

Como podemos notar, la noción de tiempo está asociada a algo que se mueve o cambia y como tal puede hablarse de intervalos de tiempo. Se dice que el tiempo es el resultado de comparar dos instantes.

Cuando decimos que son las 8 pm queremos indicar que han transcurrido 8 horas desde el instante del mediodía.

Cuando decimos que estamos en 1996, queremos dar a entender que se han sucedido 1996 años desde el nacimiento de Cristo hasta nuestros días.

Cualquier fenómeno que se repita puede usarse como una medición del tiempo, el cual se haría contando dichas repeticiones. Por ejemplo: los latidos del corazón, las oscilaciones de un péndulo, las gotas que se desprenden de un suero fisiológico.

Entre los muchos fenómenos repetitivos que ocurren en la naturaleza se ha usado la rotación de la tierra sobre su eje para medir el tiempo, lo que determina la duración del día.

El tiempo es una magnitud universal y su unidad fundamental es el segundo (s), el cual fue definido originalmente como la 86.400 ava parte del día solar medio, que es la duración de un día promedio a lo largo del año.

Debido a que la rotación de la tierra no es exactamente regular, puesto que varía con las estaciones, hubo la necesidad de buscar un tipo de comportamiento periódico que sea de mayor precisión. Esta precisión se consiguió con el reloj atómico y desde 1967 el **segundo** patrón se define así:

Un segundo es el intervalo de tiempo correspondiente a 9.192.631.770 períodos de una

radiación característica emitida por los átomos de cesio-133.

Este patrón presenta la ventaja de ser **indestructible y reproducible.**

Como existe la necesidad de medir tiempos cortos, el día se dividió en intervalos de tiempos más pequeños que el segundo, usándose el milisegundo, microsegundo y nanosegundo.

En la tabla IV se muestran algunos intervalos de tiempo en **segundos:**

Tabla IV

5.10^{17}	Edad del universo
$1.3.10^{17}$	Edad de la tierra
$3,2.10^{7}$	Un año
$8,7.10^{4}$	Un día
8.10^{-1}	Entre latidos del corazón
1.10^{-6}	Período de ondas de radio
1.10^{-13}	Período de vibración de un átomo
2.10^{-15}	Período de una onda luminosa
1.10^{-22}	Duración de la colisión nuclear
$3,3.10^{-24}$	Tiempo en cruzar la luz un protón

1.9 Lenguaje matemático. Relación entre parámetros.

Funciones lineales

Ordinariamente, el estudio de una ley física se realiza mejor ayudándose con una representación gráfica. Mediante ella se obtiene una visión global del fenómeno, permitiéndonos con una simple inspección ver mucho más y con mayor claridad.

Todo experimento realizado en los tópicos de la física exige la toma de datos como resultado de las mediciones realizadas. Las cifras que se han obtenido de los experimentos se recogen en una **tabla de datos.** Esta es la agrupación de un conjunto de datos experimentales, dispuestos en forma de tablero de dos columnas o de dos filas.

Supongamos que deseamos representar gráficamente una ley física que liga a dos magnitudes "X" e "Y" mediante la función Y = f(X), en donde "X" representa **la variable independiente,** es decir, la magnitud a la que vamos dando valores seleccionados libremente, y "Y" representa la **variable dependiente,** o sea, la magnitud que toma valores determinados según los valores asignados a la variable "X".

Una función es una relación capaz de crear dependencia entre las variables que intervienen en un fenómeno.

Ejemplo 1

Consideremos la expresión $y = 4x$.

Tratemos de asignarle a x valores arbitrarios, obteniéndose valores de y.

Si $x = 1 \longrightarrow y = 4.1 = 4$

Si $x = -1 \longrightarrow y = 4.(-1) = -4$

Si $x = -2 \longrightarrow y = 4.(-2) = -8$

Si $x = 2 \longrightarrow y = 4.2 = 8$

Con los resultados obtenidos construimos una **tabla de datos.**

x	1	-1	-2	2
y	4	-4	-8	8

Sobre un eje de coordenadas representamos los valores de la tabla, obteniéndose la gráfica de la figura 1.10.

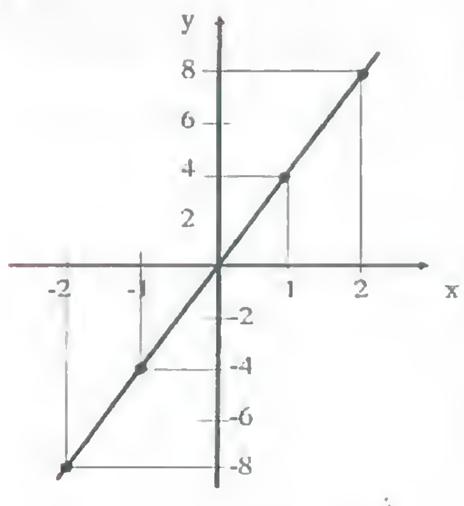


Figura 1.10

Como puede notarse, la gráfica es **una recta que pasa por el origen**. Como la gráfica obtenida es una recta, se dice que la expresión inicial $y = 4x$ es una función lineal que consta de dos variables:

x: variable independiente

y: variable dependiente

- Se acostumbra, al hacer la gráfica, ubicar la variable independiente en el eje horizontal o eje de abscisas y la variable dependiente en el eje vertical o eje de ordenadas (figura 1.10).
- La gráfica obtenida se llama **gráfica de "y" en función de "x"**.

Tratemos ahora de seleccionar sobre la recta de la figura 1.10 dos puntos A y B, sindo A(2,8) y B(1,4).

Calculemos la pendiente de la recta, la cual viene dada por el cociente entre **la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas correspondientes.**

$$m = \frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$$

$$m = \frac{8 - 4}{2 - 1} = \frac{4}{1} = 4$$

Como puede notarse, el valor de **la pendiente de la recta** es el coeficiente de la x en la función $y = 4x$.

Si al coeficiente de la **x** lo llamamos **m**, siendo **m** un número real, tenemos que la expresión es de la forma **$y = mx$**.

En general:

Estas funciones, a las cuales llamaremos lineales, y que son de la forma $y = mx$, presentan las características siguientes:

a) Su representación gráfica son rectas que pasan por el origen.

b) El coeficiente de la "x" representa el valor de la pendiente de dichas rectas.

Ejemplo 2

Consideremos ahora la expresión $y = 4x - 5$.

Tratemos de darle a "x" valores arbitrarios, al igual como se hizo con el caso anterior:

Si $x = 2 \longrightarrow y = 4.2 - 5$

$y = 8 - 5$

$y = 3$

Si $x = -1 \longrightarrow y = 4(-1) - 5$

$y = -4 - 5$

$y = -9$

Si $x = 1 \longrightarrow y = 4.1 - 5$

$y = 4 - 5$

$y = -1$

Con los valores obtenidos construimos una tabla de datos:

x	2	-1	1
y	3	-9	-1

Al ubicar los valores de la tabla sobre un eje de coordenadas obtenemos la gráfica mostrada en la figura 1.11

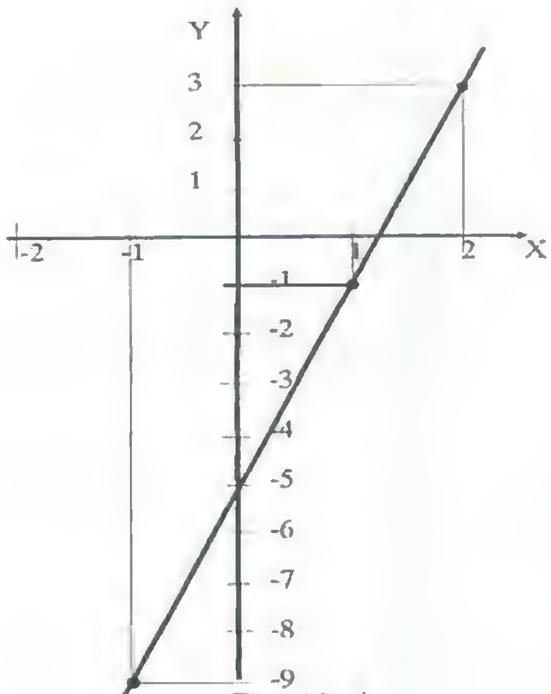


Figura 1.11

La gráfica obtenida es una recta que presenta las características siguientes:

- No pasa por el origen, corta al eje de ordenadas en -5.
- Calculemos la pendiente de la recta seleccionando los puntos A y B sobre la recta.

$$m = \frac{Y_A - Y_B}{X_A - X_B}$$

$$m = \frac{3 - (-9)}{2 - (-1)} = \frac{3 + 9}{2 + 1} = \frac{12}{3}$$

$m = 4.$

Este valor obtenido es **la pendiente de la recta,** la cual es el coeficiente de la x en la función **y = 4x - 5.**

Si llamamos **m** al coeficiente de la x, y **n** al punto donde la recta corta la ordenada, se tendrá que la función es de la forma **y = mx ±n.**

En general

Las funciones lineales de la forma **y = mx n** presentan las características siguientes:

- Su representación gráfica es una recta que no pasa por el origen.
- El coeficiente de la x es el valor de la pendiente de la recta.
- El valor de **n** representa el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Magnitudes directamente proporcionales

Consideremos dos magnitudes como la **masa** (g) y el **volumen** (ml). Observemos sus valores en la siguiente tabla de datos:

m (g)	0	3,5	7	10,5	14	17,5	21
V (ml)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Tabla 1.5

Con los datos de la tabla hacemos una gráfica de **la masa en función del volumen,** obteniéndose la figura 1.12.

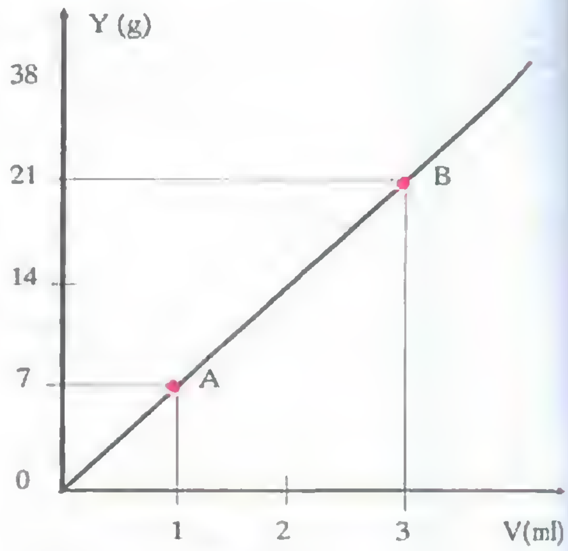


Figura 1.12

La gráfica obtenida es una recta que pasa por el origen.

Seleccionemos los puntos A y B sobre la recta de la gráfica y calculemos la pendiente de dicha recta:

$$m = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - Y_A}$$

$$m = \frac{21\text{ g} - 10{,}5\text{ g}}{3\text{ ml} - 1{,}5\text{ ml}} = \frac{10{,}5\text{ g}}{1{,}5\text{ ml}}$$

$m = 7$ g/ml

Este valor de la pendiente representa **la constante de proporcionalidad**

De las magnitudes dadas podemos observar dos cosas:

- La gráfica de **m** en función de **V** es una recta que pasa por el origen.
- La pendiente de la recta es una constante llamada **constante de proporcionalidad.**

Dos variables o magnitudes que cumplen con estas condiciones se les dice que son **directamente proporcionales**

La ecuación que liga a las dos variables es de la forma y = mx, pudiéndose escribir la siguiente ecuación:

$$m = 7V$$

Conclusión

Dos magnitudes tales como "m" y "V" se dice que son directamente proporcionales cuando la gráfica de "m" en función de "V" es una recta que pasa por el origen y la relación o cociente entre dichas magnitudes es una constante llamada constante de proporcionalidad.

Variación lineal

Consideremos un cuerpo elástico que cuelga de un soporte fijo. El cuerpo elástico presenta una longitud inicial de 4 cm. Al ir colocando masas de 100 g, 200 g, 300 g y 400 g el cuerpo elástico va aumentando de longitud.

En la tabla de datos se muestran los diferentes valores adquiridos por L cuando m aumenta:

L (cm)	4	8	12	16	20
m (g)	0	100	200	300	400

Con los datos de la tabla construimos una gráfica de L en función de m, obteniéndose la figura 1.13.

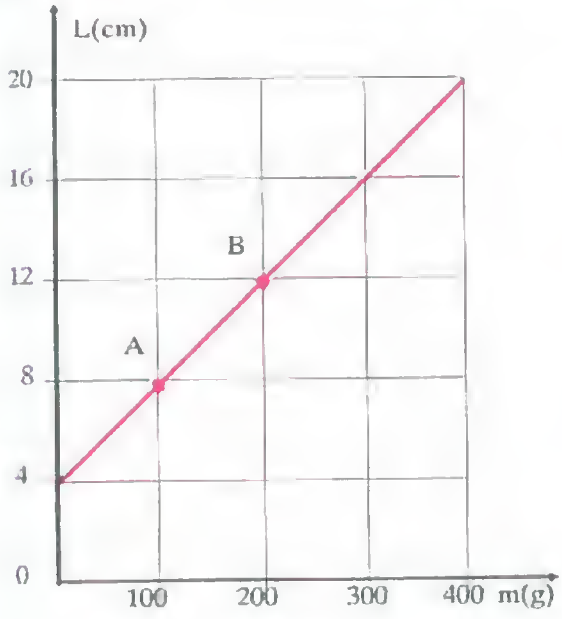


Figura 1.13

Es importante hacer notar que cuando m = 0 se obtiene L = 4. La gráfica de L en función de m es una recta que no pasa por el origen. En este caso se dice que la relación entre L y m no es una proporción directa, se dice que es una **variación lineal.**

Conclusión

Si al representar gráficamente los valores de dos variables se obtiene una recta que no pasa por el origen, decimos que dichas variables están relacionadas a través de una **variación lineal.**

Al calcular la pendiente de la recta para los puntos A y B obtenemos:

$$m = \frac{12\text{ cm} - 8\text{ cm}}{200\text{ g} - 100\text{ g}} = \frac{4\text{ cm}}{100\text{ g}}$$

$$m = 0{,}04\text{ cm/g}$$

Este valor de la pendiente significa que el cuerpo elástico se alarga 0,04 cm por cada gramo de masa que se le coloque.

Como ésta función es de la forma y = **mx + n**, podemos escribir matemáticamente la ecuación para ésta variación lineal así:

$$L = 0{,}04m + 4$$

La pendiente es 0,04 y el punto donde la recta corta a las ordenadas es 4.

Magnitudes inversamente proporcionales

Consideremos ahora dos variables "X" e "Y" y su respectiva tabla de datos:

X	1	2	3	4	6	12
Y	12	6	4	3	2	1

Tabla 1.14

Con los datos de la tabla hacemos la gráfica mostrada en la figura 1.14, que como puede observarse es una curva.

En la gráfica se nota que "Y" disminuye a medida que aumentan los valores de "X".

Evaluemos los productos de los valores de "Y" por los correspondientes valores de "X":

$$12.1 = 2.6 = 3.4 = 12$$

Observamos que dichos productos dan un valor constante, que en éste caso es igual a 12. Se dice entonces que al cumplirse este hecho las magnitudes "X" e "Y" son inversamente proporcionales.

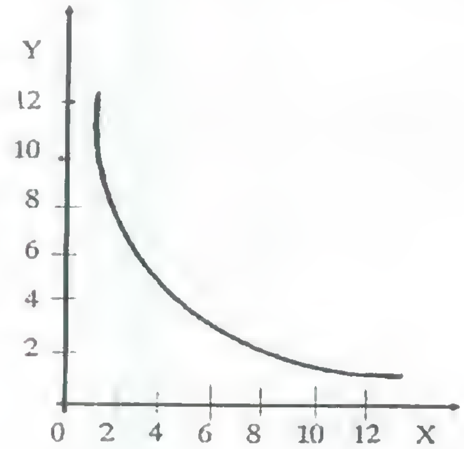


Figura 1.14

Conclusión

Dos magnitudes "X" e "Y" se dice que son inversamente proporcionales cuando "X" e "Y" varían de tal forma que el producto entre dichas magnitudes es constante.

En este caso, la gráfica es una hipérbola.

Ejercicios propuestos

1. En la tabla de datos se muestran los valores obtenidos entre dos variables p y s.

p	0	1	2	3	4	5
s	0	2	4	6	8	10

a) Construye una gráfica de p en función de s

b) ¿Son las variables inversa o directamente proporcionales?. Explica.

c) Calcula la pendiente de la recta.

d) Escribe una ecuación que relacione las variables.

2. La ecuación que relaciona dos variables viene dada por la expresión $h = 3t - 2$.

a) Si $t = 0$ ¿Cuál es el valor de h?

b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

c) Haz un tabla de datos para valores de $t = 1, 2, -1, -2$.

d) Partiendo de los datos de la tabla construye la gráfica de h en función de t.

e) ¿Qué características presenta la gráfica construida?

3. Se da la siguiente tabla que relaciona las variables presión en atmósferas(atm) y volumen en mililitros(ml)

P (atm)	40	30	20	10	0
V (ml)	0	2	4	6	8

a) Construye una gráfica de la presión en función del volumen (presión en ordenadas y volumen en abscisas).

b) Escribe la ecuación que relaciona a las variables.

c) ¿Cuál es el valor de la presión cuando el volumen es de 3 ml?

d) ¿Cuál es el valor del volumen cuando la presión es de 25 atmósferas?.

4. En un experimento se comprobó que entre las variables existe la siguiente relación matemática: $L = 3H$.

a) ¿Puede decirse que L y H son proporcionales?

b) ¿Qué forma tendría la gráfica de L en función de H?

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las variables?.

5. Se comprobó a través de un experimento que entre las variables V y H existe la siguiente relación matemática:

$V = 0{,}5H - 2$.

a) ¿Cómo es la variación entre V y H?

b) ¿Cuál es el valor de V si H = 10?

c) Si construimos la gráfica de V en función de H, ¿Qué características presentará la gráfica?.

d) ¿Cuál es el valor de la pendiente?.

6. La gráfica obtenida de P en función de L es una recta de pendiente 0,05 y corta al eje de ordenadas en 50.

a) Escribe la ecuación entre las variables

b) ¿Cuál es el valor de P cuando L = 10?

c) ¿Cuál es el valor de L cuando P = 100?

d) Completa la tabla siguiente:

L	0	100	200	300	400
p					

e) Construye la gráfica de P en función de L.

7. Exprese p en función de t y escribe la ecuación correspondiente en cada uno de los siguientes casos:

a) p es directamente proporcional a t. Constante de proporcionalidad h.

b) p es directamente proporcional a la raíz cuadrada de t. Constante de proporcionalidad 1,2.

c) La gráfica de p en función de t es una recta que corta a las ordenadas en s y tiene pendiente k.

8. Se da una tabla de la altura h de un líquido en cm y el volumen en mililitros

h (cm)	1	2	3	4	5	6
V (ml)	200	400	600	800	1000	1200

a) Haz una gráfica de V en función de h

b) Calcula los cocientes de cada volumen por su correspondiente altura. ¿Son iguales los valores?

c) Escribe la ecuación que relaciona las variables.

9. Se da una tabla de datos de las presiones Pr en atmósferas(atm) y los volúmenes en mililitros(ml).

Pr (atm)	100	80	50	40	25	20
V (ml)	100	125	200	250	400	500

a) Evalúa los productos de cada presión por su correspondiente volumen. ¿Son iguales esos valores?.

b) De acuerdo a la respuesta anterior ¿Qué proporcionalidad existe entre las variables que intervienen?

c) Haz una gráfica de la presión en función del volumen.

9. Se miden los volúmenes (V) en litros de una masa gaseosa a temperatura fija y diferentes presiones (Pr) en atmósferas, obteniéndose los siguientes datos:

Pr (atm)	1	2	4	5	8	10	20	40
V (l)	200	100	50	40	25	20	10	5
Pr.V	200							

a) Haz una gráfica, tomando presiones en ordenadas y volúmenes en abscisas.

b) ¿Cómo es la proporcionalidad entre las variables?.

c) Construye una gráfica tomando presiones en ordenadas y los inversos de los volúmenes en abscisas. ¿Cómo es la gráfica obtenida?.

d) Haz una gráfica tomando presión x volumen en ordenadas y presión en abscisas. ¿Cómo es la gráfica obtenida?.

e) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?. Expresa la ley a través de una ecuación matemática.

1.10 Estructura conceptual de la física

Como sabemos, la palabra física proviene del vocablo griego physis, que significa naturaleza. Etimológicamente se puede decir:

La física es la ciencia de la naturaleza que estudia el universo y las leyes naturales por las cuales se rige el mundo en su aspecto físico.

Con mayor precisión se puede definir a la física así:

La física es la ciencia que estudia las propiedades de la materia y las interacciones mutuas, con el fin de explicar las propiedades generales de los cuerpos y de los fenómenos naturales sin variar su naturaleza.

En ese complejo mundo que constituye la física de nuestros días encontramos **leyes físicas, fórmulas y símbolos, hipótesis y teorías** que no podemos dejar de un lado.

- **Ley física**

La ley física es un enunciado general que trata de expresar científicamente una relación entre las diferentes variables que intervienen en un fenómeno, convirtiéndose en un hecho aceptado.

Una ley es el resultado de un proceso de síntesis o inducción, que proviene desde un conjunto de hechos particulares hacia una proposición más general que las incluye y las generaliza.

Para encontrar la ley, se ordenan en cuadros los resultados de las medidas realizadas y se dibujan gráficos, analizándose éstos de una manera cualitativa y cuantitativa. Haciendo uso de la matemática se formulan leyes, que de ser posible son expresadas en ecuaciones matemáticas.

Ejemplos de leyes tenemos: las leyes de Newton, la ley de Hooke, las leyes de Kepler.

- **Fórmulas y símbolos**

Las fórmulas y símbolos son relaciones matemáticas que representan las magnitudes y factores que intervienen en el estudio de un fenómeno físico.

Generalmente, las leyes cuantitativas se expresan a través de fórmulas, mientras que las magnitudes que intervienen son representadas por medio de símbolos. Así, la magnitud volumen se representa por V y la presión por Pr.

Para la física, las leyes cuantitativas son más útiles que las leyes cualitativas, porque nos indican no solamente cómo varían las magnitudes que intervienen en un fenómeno, sino que también nos indican cuántas veces varía.

Por ejemplo, si en una experiencia, el volumen y la presión inicial de un gas son respectivamente V_1 y P_1, y posteriormente son V_2 y P_2, la ecuación que expresa la ley de Boyle viene dada por:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

- **Hipótesis**

El trabajo científico no finaliza con el establecimiento de leyes. Para explicar las leyes obtenidas se hacen suposiciones o hipótesis. De estas hipótesis se deducen consecuencias que se habrán de comprobar experimentalmente.

No sólo en el trabajo científico sino en la vida diaria se sigue este método. Así, por ejemplo, si un amigo con el que estamos citado llega tarde, hacemos una **hipótesis** para explicar: quizás esté enfermo. De esta hipótesis deducimos como consecuencia: no habrá salido de casa. Lo comprobamos llamando por teléfono. Si ha salido, la hipótesis falla y habrá que hacer otra.

Podemos definir hipótesis así:

Una hipótesis es un conjunto de suposiciones que tratan de explicar la naturaleza de los fenómenos físicos desconocidos en función de los conocidos.

Se dice que es una suposición tentativa sobre los fenómenos que se están analizando, con el objeto de que sirvan de guía al proceso de investigación.

- **Teoría**

Se dice, que una vez formuladas las leyes debe existir entre ellas una coordinación, con el objeto de ser incorporadas a una estructura capaz de relacionar un conjunto de hechos experimentales que sirvan para dar explicaciones y predecir resultados.

Una teoría es una hipótesis amplia, capaz de abarcar un conjunto de hechos experimentales, con el fin de hacer predicciones.

Una teoría debe estar de acuerdo con todos los hechos observados. Basta que esté en desacuerdo con uno sólo para que ella deba ser desechada o modificada.

La teoría de la relatividad de Einstein permitió predecir la transformación de masa en energía, que se verifica en las explosiones atómicas.

La teoría tiene más seguridad que la hipótesis, es la auxiliar más eficiente en la investigación, es la que conduce a los investigadores para encontrar la verdad que buscan.

Autoevaluación 1

A. A continuación se dan varias afirmaciones entre falsas y verdaderas. Di cuáles son falsas y cuáles son verdaderas. En caso de ser falsa explica las razones.

a) La descripción cualitativa se fundamenta en las mediciones.

b) La descripción cuantitativa es más precisa que la descripción cualitativa.

c) Los tres conceptos fundamentales de la física son: longitud, masa y tiempo.

d) Una magnitud se define como toda propiedad susceptible de medición.

e) Un ángulo se puede medir únicamente en radianes.

f) La superficie es una unidad fundamental.

g) El microsegundo es un múltiplo del segundo.

h) La descripción cualitativa de un fenómeno se refiere a sus características.

i) El m/s es una unidad derivada.

j) Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto entre sus variables es constante.

B. A continuación se te presentan una serie de proposiciones con cuatro alternativas cada una. Selecciona la alternativa correcta y escríbela en tu cuaderno.

1. Algunas de las unidades fundamentales en el Sistema Internacional son:

a) metro, gramo, kilogramo

b) longitud, masa, tiempo

c) kilogramo, segundo, metro

d) centímetro, segundo, gramo

2. Medir una magnitud es un proceso que consiste en:

a) Calcular su valor numérico

b) Pesarla

c) Compararla con un patrón

d) Buscar su longitud

3. El orden de magnitud de la medida 0,00075 km es:

a) 10^{-4} b) 10^{-5}

c) 10^{-3} d) 10^{-6}

4. La medida 5860000 mm escrita en notación científica es:

a) $5{,}86.10^{-6}$ mm

b) $5{,}86.10^{6}$ mm

c) 586.10^{4} mm

d) $5{,}86.10^{-5}$ mm

5. Cuando en una gráfica, de una variable en función de otra, se obtiene una recta que pasa por el origen, significa que las variables:

a) Son inversamente proporcionales

b) Son directamente proporcionales

c) No guardan relación definida

d) Una varia con el cuadrado de la otra

6. El valor equivalente en radianes de un ángulo de 420^{0} es:

a) 7,329 b) 949,536

c) 66,87 d) 1,16

7. En la función $y = 3x + 4$ el valor de la pendiente es:

a) 4 b) 3

c) 7 d) 3/4

8. La relación entre las magnitudes que intervienen en un fenómeno se llama:

a) Teoría b) Fórmula

c) Ley física d) Hipótesis

9. El conjunto de unidades constituido por una unidad de cada magnitud se llama:

a) Unidad fundamental

b) Unidad derivada

c) Ley general

d) Sistema de unidades

10. La relación lineal entre x e y viene dada por $y = -3x + 2$. Entonces:

a) 2 es la constante de proporcionalidad

b) -3 es el punto donde la recta corta al eje y

c) -3 es la constante de proporcionalidad

d) 3 es la constante de proporcionalidad.

C. Resuelve los siguientes problemas:

1. Se da la siguiente tabla de datos de temperatura y tiempos:

T (°C)	18	20	22	24	24	28	32
t (min)	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9

a) Construye la gráfica de T en función de t

b) Calcula la pendiente entre 0 min y 4,5 min

c) ¿En qué intervalo de tiempo se mantiene constante la temperatura.?

d) Calcula la pendiente entre 6 min y 9 min.

2. Se da la siguiente tabla de datos:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	0	4	8	12	16	20	24	28

a) Construye la gráfica de y en función de x

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

c) Escribe la ecuación que relaciona estas variables.

UNIDAD II

EL MOVIMIENTO

- El movimiento. Ideas generales.
- Sistema de referencia. Sistema de coordenadas.
- Vector posición.
- Descomposición de movimientos. Traslación y rotación.
- Trayectoria.
- Distancia recorrida por la partícula o longitud de la trayectoria.
- Vector desplazamiento.
- Gráfica del vector posición en función del tiempo.
- Velocidad media. Definición: interpretación física y geométrica.
- Movimiento unidimensional. Movimiento uniforme.
- Velocidad instantánea.
- Aceleración media y aceleración instantánea.
- Movimiento rectilíneo uniformemente variado.
- Caída libre.
- Movimiento en el plano con velocidad constante.
- Movimiento de proyectiles.
- Movimiento circular. Movimiento circular uniforme.
- Movimiento armónico simple.
- Problemas propuestos.
- Autoevaluación.

UNIDAD 2

EL MOVIMIENTO

2.1 El movimiento. Ideas generales.

Si nos detuviéramos a hacer un análisis del mundo en donde nos desenvolvemos, encontraríamos que todo está dotado de movimiento. Así, nos encontramos con aspectos tales como: una persona caminando, un motor girando, un río fluyendo, una moto en marcha, un avión en vuelo. El sol y la luna tienen también un movimiento respecto a la tierra. Estos fenómenos son del llamado mundo macrofísico.

También se nos presentan fenómenos del mundo microfísico, como el caso del movimiento molecular, los átomos en una molécula no permanecen fijos y los electrones dentro del átomo están girando alrededor del núcleo. Detengámonos un poco a pensar lo que sucedería si de repente cesaran todos los movimientos en el universo en que vivimos. De inmediato nos daríamos cuenta que estamos en presencia de un universo estático, donde nada sucedería y las ideas de espacio y tiempo no tendrían razón de ser. Es ésta la razón por la cual son indispensables estos dos conceptos que tienen mucha relación con el movimiento.

De esta manera, la física debe iniciarse con un concepto del movimiento, teniéndose pendiente que todo los acontecimientos siempre ocurren: ¿dónde?, en el espacio; ¿cuándo?, en el tiempo. Por eso se dice que la materia y todas sus manifestaciones se hallan estrechamente vinculadas con el espacio y el tiempo.

2.2 Sistema de referencia.

En algunas circunstancias de la vida cotidiana, es común encontrarse con situaciones en que una persona no puede asegurar si está en movimiento o en reposo.

Si dos trenes en una estación de ferrocarril quedan ubicados en posición paralela, al partir uno de ellos, a los pasajeros no le es fácil decir si es su tren o el otro el que se puso en movimiento. Para salir de duda debe mirar a través de las ventanillas hacia una casa, un árbol o en general hacia cualquier otro objeto fijo. A ese objeto fijo le llamaremos sistema de referencia o marco de referencia, por lo que podemos definir:

Un marco de referencia es el punto considerado fijo, cuya ubicación se conoce con exactitud y a partir del cual un cuerpo cambia de posición

2.3 Sistema de coordenadas

Para el estudio del movimiento es necesario hacer como consideración la elección de un sistema de coordenadas, para lo cual debemos hacer énfasis en que el movimiento queda orientado así:

- Movimiento en una dimensión o movimiento lineal Figura 2.1(a).

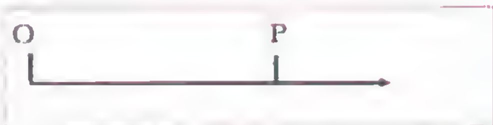


Figura 2.1 (a)

- Movimiento en dos dimensiones o movimiento en el plano. Figura. 2.1(b).

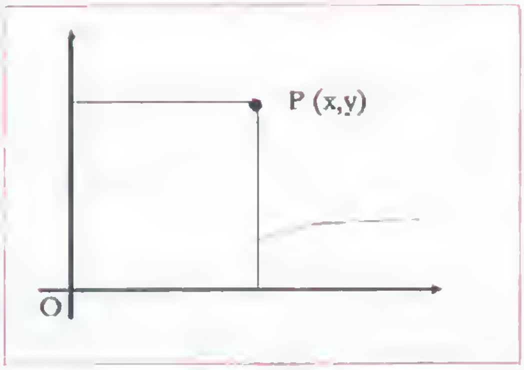


Figura. 2.1(b)

Movimiento tridimensional o movimiento en el espacio. Figura. 2.1(c).

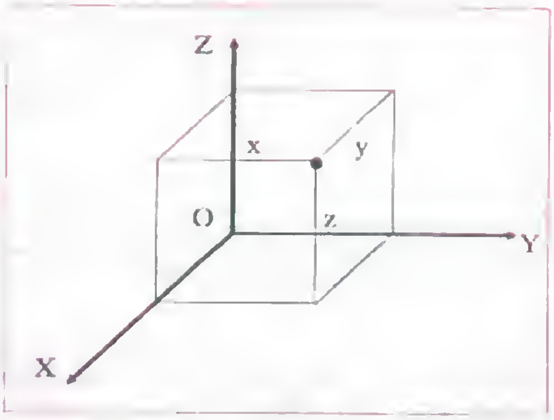


Figura 2.1(c)

De acuerdo a esto es posible elegir el sistema de coordenadas en concordancia con el tipo de movimiento al cual se haga referencia.

El sistema de coordenadas en una dimensión queda representado a través de una recta horizontal (figura 2.2), en el cual se ha elegido el punto "O" como sistema de referencia y los puntos A y B como coordenadas respecto al punto "O".

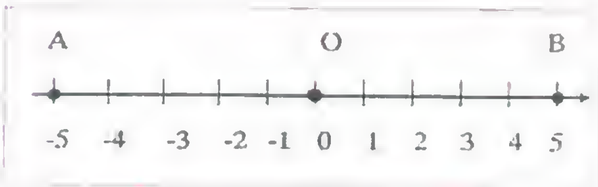


Figura 2.2

La longitud del segmento OB determina la posición del punto B, la cual es una posición positiva porque está a la derecha del punto de referencia "O", y se le llama **coordenada del punto B**, escribiéndose B(+ 5).

La longitud del segmento OA determina la posición del punto A, la cual es negativa por estar a la izquierda del punto de referencia "O" y se le llama **coordenada del punto A**, pudiéndose escribir A(-5).

Así, podemos decir que:

La posición del cuerpo en una recta está determinada por una coordenada y la distancia a lo largo de una recta es medida desde el origen de coordenadas hasta el cuerpo en cuestión.

El sistema de coordenadas en dos dimensiones queda representado a través de un plano, tal como cuando una lancha navega en un río en contra de la corriente. Aquí se trazan dos rectas perpendiculares a través del cuerpo usando éste como referencia. A estas rectas se les llama **ejes de coordenadas** (figura 2.3(a)).

Las rectas X y Y constituyen el sistema de coordenadas XOY.

Las distancias medidas desde el origen en sentido horizontal son llamadas **abscisas del punto** y las distancias medidas desde el origen en sentido vertical son llamadas **ordenadas del punto.**

Así, el punto A tiene X = 2, Y = 3, representándose A(2,3). El punto B tiene X = 4, Y = -2, representándose B(4,-2).

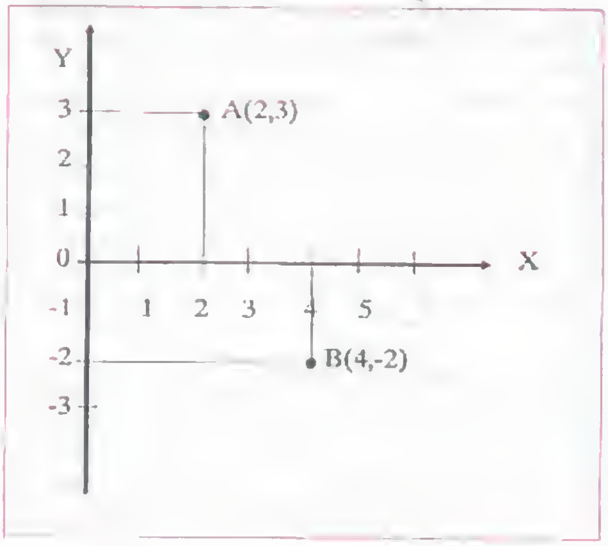


Figura 2.3(a)

El sistema de coordenadas en tres dimensiones queda representado a través de tres rectas perpendiculares entre sí, las cuales quedan representadas habitualmente como OX, OY, OZ.

Este sistema tridimensional es usado para representar puntos en el espacio. En la figura 2.3(b) el punto P está representado por tres coordenadas: P(2,3,3)

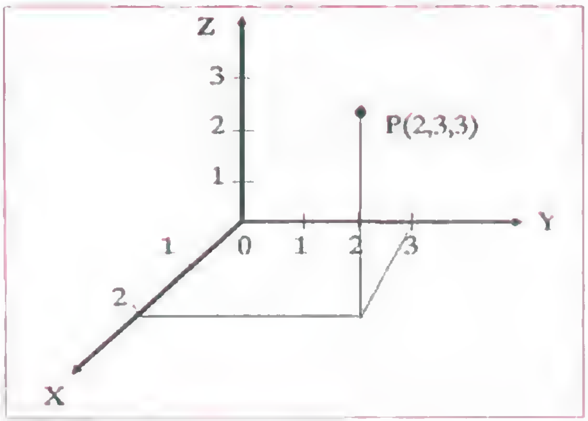


Figura 2.3(b)

2.4 El vector posición

Antes de dar una definición clara y concreta sobre el vector posición, debemos definir lo que es una partícula. **Una partícula**, llamada también **punto material, es una porción del cuerpo tan pequeña que puede considerársele sin dimensiones.** Es lógico pensar, que esta partícula no existe, pero su idealización nos permite hacer descripciones de movimientos. Se conoce el movimiento de una partícula si conocemos la ecuación que rige su movimiento, entendiéndose por tal, una expresión matemática que indica la posición del móvil en función del tiempo.

¿Qué es un vector posición? Consideremos un punto A como el mostrado en la figura. 2.4(a). Al vector que tiene su origen en el punto "O", origen del sistema de coordenadas y su extremo en el punto A (posición de la partícula), le llamaremos **vector posición "r" o vector posición del punto A.**

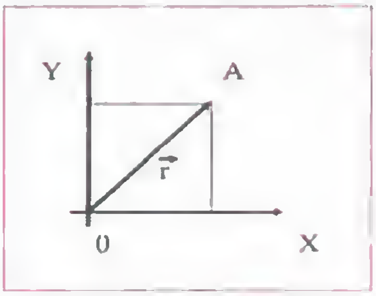


Figura 2.4(a)

El vector posición es el vector que une el origen del sistema de coordenadas con el punto donde está ubicado el objeto a estudiar.

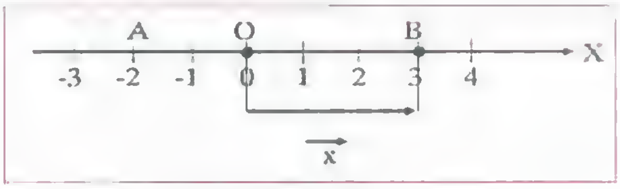


Figura. 2.4(b)

- Si el movimiento se realiza en la dirección horizontal, es decir, en una sola dimensión, la posición de la partícula B en la figura. 2.4(b) está dada por su abscisa x. Diremos que el vector que une el origen "O" con la partícula B es el **vector posición X.**

- Si el movimiento se realiza en dos dimensiones, la posición de la partícula está dada por dos coordenadas, es decir, la distancia a dos objetos fijos. Así, en la figura. 2.4(c), el vector de posición del punto P queda representado así: **r** = (3,2) o también: **r** = 3**i** + 2**j**, donde **i**,**j**, representan a los vectores unitarios en la dirección de cada uno de los ejes.

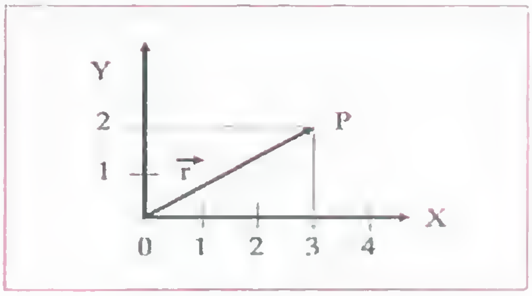


Figura 2.4(c)

En algunas ocasiones, es posibles obtener ecuaciones que nos de el vector de posición en cualquier instante **r** = f(t), es decir, el valor de sus componentes en cualquier instante x = x(t). Esa ecuación que proporciona el vector de posición en cualquier instante, recibe el nombre de ecuación de movimiento.

2.5 Descomposición de movimientos. Traslación y Rotación.

Antes de dar inicio a estas introducciones, debemos recordar o aclarar los movimientos de traslación y rotación, lo cual nos ha de permitir

diferenciarlos uno del otro cuando se hagan los análisis correspondientes.

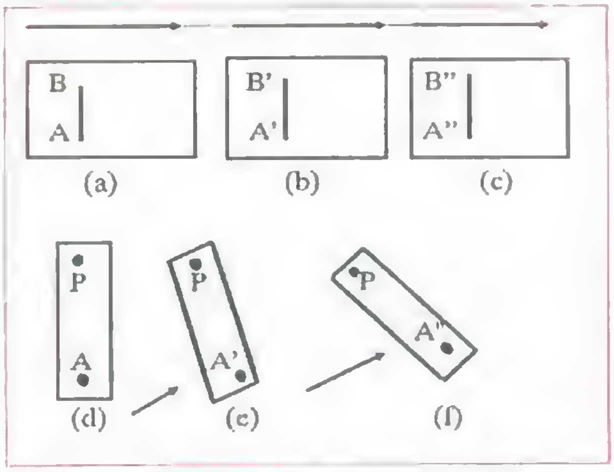


Figura. 2.5

Una gaveta que se abre, el pistón que se mueve dentro de un cilindro, todos los asientos de una noria de feria, una pieza que una grúa eleva hasta la parte alta de un edificio, son ejemplos de cuerpos en movimiento de traslación. Aquí todos los puntos del cuerpo recorren distancias idénticas y describen trayectorias idénticas durante su movimiento. Sus segmentos se mantienen paralelos a sí mismo y cada punto del cuerpo realiza el mismo desplazamiento que cualquiera otro. En las figuras 2.5(a), 2.5(b) y 2.5(c) se muestra el movimiento de traslación que realiza el cuerpo, donde el segmento AB ocupa posiciones A'B' y A"B" . De acuerdo al análisis, definimos que:

Un cuerpo tiene un movimiento de traslación cuando todas sus partes se mueven idénticamente o cuando un segmento de él se mantiene paralelo a sí mismo durante todo el movimiento.

Por otra parte, tenemos el movimiento de rotación, el cual podemos observarlo cuando una letra de los cauchos del automóvil se mueve alrededor del eje del caucho. También la tierra está en rotación alrededor de su eje. En las figuras 2.5(d), 2.5(e) y 2.5(f) se muestra el movimiento de rotación de un cuerpo alrededor de un eje que pasa por el punto P. Aquí, el punto A ocupa las posiciones A', A", describiendo una circunferencia de centro P. En general, podemos definir que:

Un cuerpo está dotado de movimiento de rotación pura cuando todos sus puntos describen circunferencias que tienen en su centro una misma recta fija llamada eje de rotación.

2.6 Trayectoria.

Consideremos una partícula que en dos instantes de tiempo diferentes ocupa las posiciones A y B, como lo muestra la figura. 2.6(a)

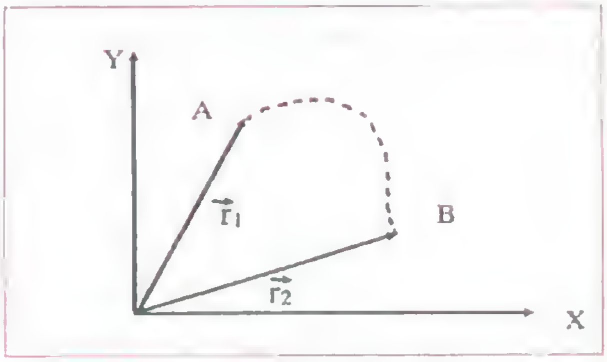


Figura. 2.6(a)

El vector $\mathbf{r}_1$, representa el vector posición de la partícula en el punto A, en el primer instante de tiempo. El vector $\mathbf{r}_2$ representa el vector posición de la partícula en el punto B, en el segundo instante de tiempo.

Aquí se observa que el vector posición cambia con el tiempo. Esto nos permite definir:

El movimiento de traslación y de rotación de una partícula no es más que el cambio del vector posición respecto al tiempo.

La línea punteada de la figura 2.6(a) nos está representando el camino que ha seguido la partícula para ir desde la posición A hasta la posición B, la cual denominaremos trayectoria y que definimos así:

La trayectoria es el conjunto de posiciones sucesivas ocupadas en el transcurso del tiempo por la partícula móvil durante su desplazamiento.

Clasificación de las trayectorias.

Las trayectorias suelen ser clasificadas de la manera siguiente:

* **Rectilíneas.** Cuando el movimiento se realiza en línea recta y en una sola dimensión y el vector posición queda determinado a través de una sola coordenada referida únicamente a las abscisas, donde el vector queda representado por **r** (figura. 2.6(b).

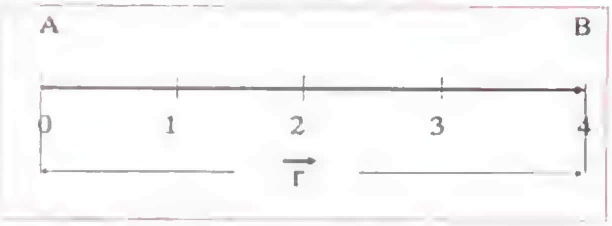


Figura. 2.6(b)

* **Curvilínea bidimensional.** Cuando el movimiento está referido a un plano y el vector posición está perfectamente determinado por dos coordenadas, tal y como lo indica la figura. 2.6(c) **r** = a**i** + b**j**. Siendo **i**,**j** los vectores unitarios en las direcciones de los ejes.

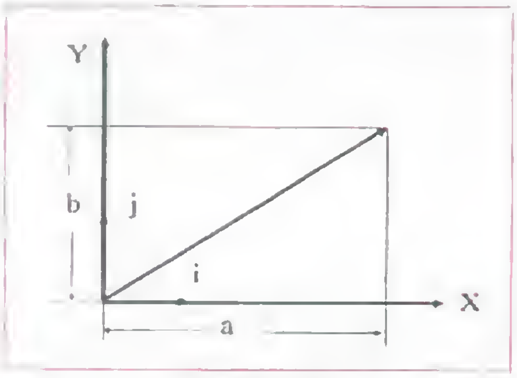


Figura. 2.6.(c)

* **Curvilínea tridimensional.** Cuando el movimiento está referido al espacio y el vector posición queda perfectamente determinado por tres coordenadas, tal y como lo indica la figura. 2.7(a).

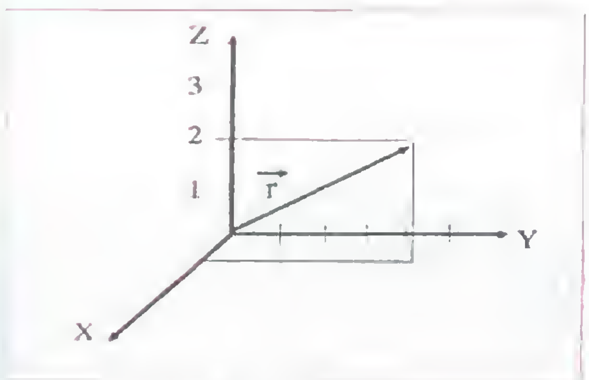


Figura. 2.7 (a)

En la figura 2.7(a), el vector posición del punto P puede escribirse de dos maneras:

r = **i** + 5**j** + 2**k** o también **r**(1,5,2)

En la figura. 2.7(b) se observa que el punto P se mueve describiendo una circunferencia de centro "O". Si parte desde P, al cabo de 5 segundos estará otra vez en la posición inicial y cada 5 segundos se repite el proceso nuevamente, decimos que estamos en presencia de un movimiento periódico. De esta manera definimos que **un movimiento periódico es aquel que se repite a intervalos de tiempos iguales.** Un caso de movimiento periódico lo constituye el movimiento circular uniforme.

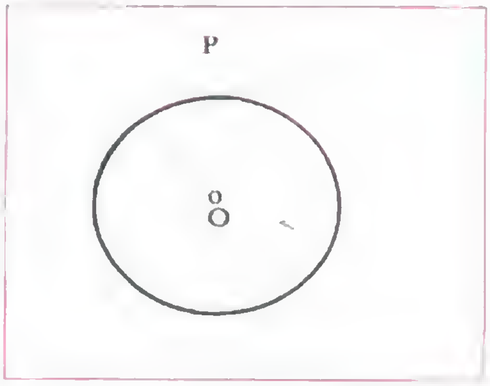


Figura. 2.7(b)

Se llama movimiento no periódico aquel donde no se repite el movimiento a intervalos regulares de tiempos. Este es el caso del movimiento de las moléculas de un gas, que está sujeto a las leyes de la probabilidad.

2.7. Distancia recorrida por la partícula o longitud de la trayectoria.

La longitud que se mide sobre la trayectoria se le llama **distancia recorrida.** En la figura. 2.8(a) la trayectoria en ir desde "O" hasta A tiene una longitud de 4 m. En la figura. 2.8(b) la trayectoria en ir desde A hasta B y luego a C, tiene una distancia recorrida de 6 m. En la figura. 2.8(c) la distancia recorrida desde A, pasando por B y C hasta llegar a A, no es más que la longitud de la circunferencia.

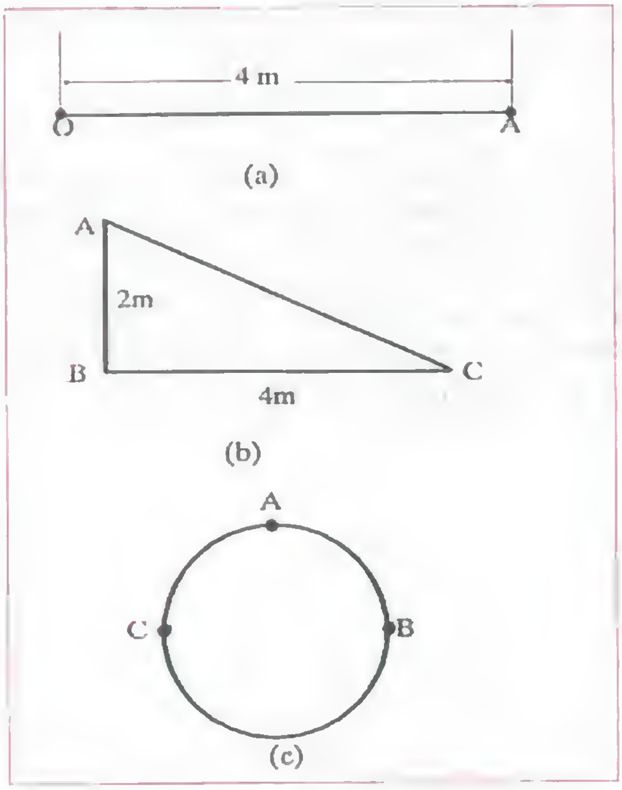


Figura. 2.8

2.8 El vector desplazamiento.

Vamos a referirnos a la figura. 2.9(a), donde el punto A tiene a $\mathbf{r}_1$ como vector posición y el punto B tiene a $\mathbf{r}_2$ como vector posición. La partícula en su movimiento pasa desde el punto A hasta el punto B, después de transcurrido el tiempo t. Al vector que va dirigido desde la posición inicial a la posición final se le llama **vector desplazamiento.** Es evidente que este vector desplazamiento es la diferencia entre el vector de posición final $\mathbf{r}_2$ y el vector de posición inicial $\mathbf{r}_1$ y lo representamos como: $\Delta\mathbf{r}$

$$\boxed{\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}$$

Dicho vector está indicando la variación del vector posición con el tiempo. En la figura 2.9(b) se muestra una partícula que va desde la posición A hasta la posición B, pero siguiendo la trayectoria de puntos. En este caso la trayectoria no tiene la misma dirección del desplazamiento, lo que nos conduce a decir que **el vector desplazamiento y la trayectoria** sólo coinciden cuando la trayectoria es una línea recta.

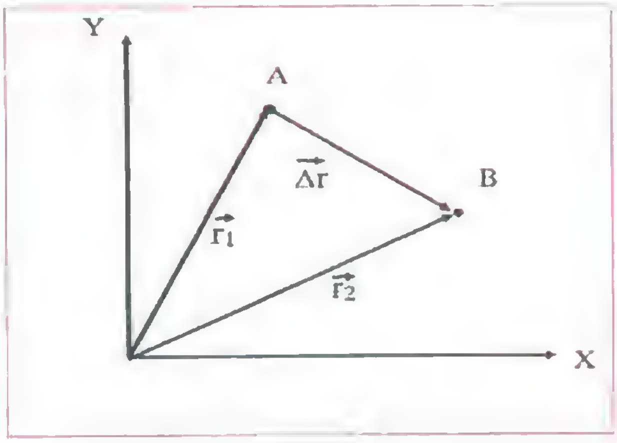


Figura. 2.9(a)

En la figura 2.9(b) la partícula pude trasladarse desde A hasta B describiendo infinitas trayectorias, pero en todo caso el vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ es único, pues solo depende del par de posiciones consideradas.

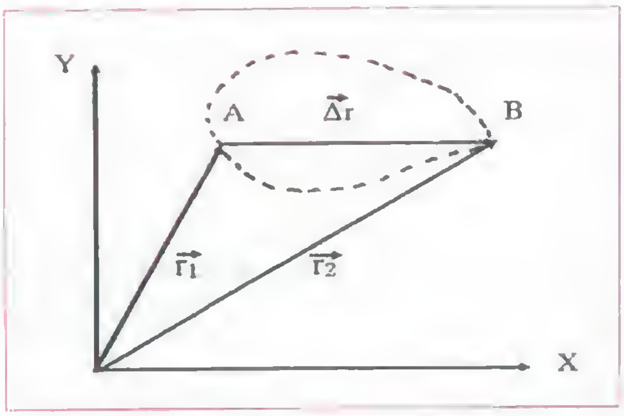


Figura. 2.9(b)

2.9. Velocidad media

Consideremos una partícula que en el tiempo t_1 se encuentra en la posición A y cuya posición en el plano está representada por el vector de posición $\mathbf{r}_1$ figura. 2.10(a). Supóngase que en un instante de tiempo posterior t_2, la partícula se encuentra en el punto B, determinado por el vector de posición $\mathbf{r}_2$. El vector desplazamiento que describe el cambio en la posición de la partícula cuando se mueve

desde A hasta B es $\Delta r = r_2 - r_1$ y el tiempo transcurrido durante el movimiento entre estos puntos es:

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

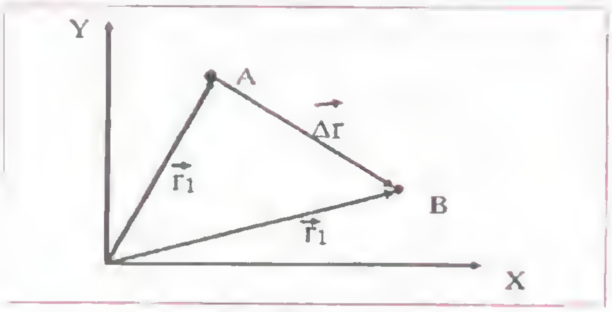


figura 2.10(a)

La velocidad media con respecto a un intervalo de tiempo Δt, queda definida como la razón del vector desplazamiento Δr y el intervalo de tiempo Δt correspondiente.

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La velocidad media es un vector con la misma dirección y sentido del desplazamiento, expresándose en unidades de longitud por unidades de tiempo

Interpretación geométrica de la velocidad media. Velocidad instantánea.

Hablar de velocidad media en un movimiento uniforme no es tan importante, ya que la velocidad es constante durante todo el movimiento. Pero, veamos qué ocurre en el caso de velocidades variables. Para ello debemos suponer que un cuerpo se ha desplazado conforme a la siguiente tabla de datos relativa a tiempo y posición.

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x(m	0	5	20	50	100	160	210	240	250	256	260

Tabla 2.1

Al dibujar la gráfica correspondiente a la anterior tabla de valores, nos daremos cuenta que se trata de un movimiento con velocidad variable y por tanto nos interesa conocer el valor de la velocidad media:

$$V = \frac{260 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 26 \text{ m/s}$$

Calculemos las velocidades medias en cada intervalo

Cabría preguntarnos en este momento, ¿en qué forma podríamos acercarnos al logro de un valor para la velocidad media, que estuviera más cerca de la realidad física?. Sencillamente, calculemos las velocidades medias para intervalos de tiempo más pequeños.

* Para el primer segundo:

$$V = \frac{5\text{m} - 0\text{m}}{1\text{s} - 0\text{s}} = 5 \text{ m/s}$$

* Para el segundo segundo:

$$V = \frac{20\text{m} - 5\text{m}}{2\text{s} - 1\text{s}} = 15 \text{ m/s}$$

* Para el tercer segundo:

$$V = \frac{50\text{m} - 20\text{m}}{3\text{s} - 2\text{s}} = 30 \text{ m/s}$$

En general para n segundos

$$V = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

Si los intervalos de tiempo los tomamos todavía más pequeños, nos acercamos cada vez más hacia el conocimiento de la velocidad real de cada tramo, podemos llegar fácilmente a determinar la velocidad en cada punto logrando así el cálculo de la **velocidad instantánea.** Según esto, **la velocidad instantánea sería en verdad una velocidad media correspondiente a un intervalo de tiempo muy pequeño.** De esta manera decimos que la velocidad instantánea es la razón entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo correspondiente cuando éste tiende a cero.

$$V = \text{límite } \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{cuando } \Delta t \text{ tiende a cero}$$

Tratemos ahora de ver el **significado geométrico** del concepto de velocidad media en un movimiento de velocidad variable y también la significación del concepto de velocidad instantánea.

Consideremos que la gráfica de un viaje es la correspondiente a la figura 2.10(b) y que deseamos hallar la velocidad del cuerpo en el punto P. Para ello debemos considerar la velocidad media entre los puntos A y B próximos a P y los unimos por medio de la cuerda AB y la pendiente de esta cuerda nos dará la velocidad media buscada.

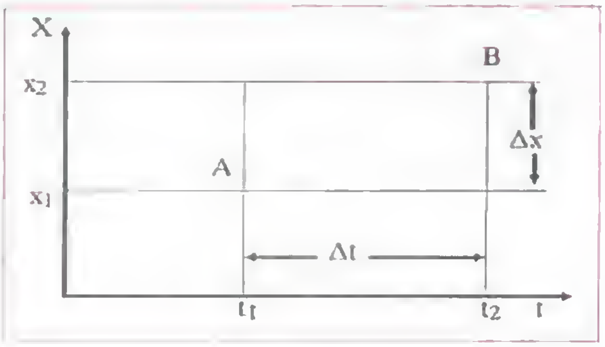


Figura. 2.10(b)

Si los puntos los vamos acercando al punto P y dibujamos las correspondientes cuerdas, a las cuales hallamos sus pendientes, estaremos determinando en todos los casos las velocidades medias correspondientes a intervalos de tiempo cada vez más pequeños. Si continuamos disminuyendo los intervalos de tiempo, llegará un instante en que los puntos A y B coinciden con P, y la cuerda se habrá reducido a un punto. Si por este punto trazamos una tangente y hallamos su pendiente nos dará **la velocidad correspondiente al punto P.**

De lo anterior se deduce que la única forma de conocer el movimiento de un cuerpo en cada instante, es medir su velocidad media para desplazamientos muy pequeños durante intervalos de tiempo también muy pequeños a cada momento.

En general definimos que:

La velocidad instantánea cuando el intervalo de tiempo tiende a cero es la pendiente de la tangente a la curva en el punto considerado.

La rapidez media

Cuando se considera la distancia total recorrida por el móvil, en lugar del desplazamiento que sufre, estamos en presencia de la **rapidez media**. Ésta es una magnitud escalar, en cambio la velocidad media es una magnitud vectorial.

$$V = \frac{x}{t}$$

v = rapidez media
x = distancia
t = tiempo

Ejemplo

La figura 2.11 ilustra la trayectoria de un móvil. Calcular:

a) La velocidad media en cada intervalo.

b) La velocidad media y la rapidez media de todo el movimiento.

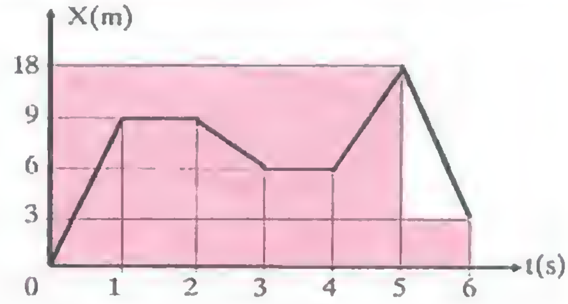


figura 2.11

Solución:

Se separan los intervalos de acuerdo con las características del movimiento:

$\Delta t_1 = 1s - 0s$; $\Delta t_2 = 2s - 1s$

$\Delta t_3 = 3s - 2s$; $\Delta t_4 = 4s - 3s$;

$\Delta t_5 = 5s - 4s$; $\Delta t_6 = 6s - 5s$

La magnitud de la velocidad media es:

$$V_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{9m - 0m}{1s - 0s} = 9 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{9m - 9m}{2s - 1s} = 0 \text{ m/s}$$

$$V_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} = \frac{6m - 9m}{3s - 2s} = -3 \text{ m/s}$$

$$V_4 = \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} = \frac{6m - 6m}{4s - 3s} = 0 \text{ m/s}$$

$$V_5 = \frac{\Delta x_5}{\Delta t_5} = \frac{12m - 6m}{5s - 4s} = 6 \text{ m/s}$$

$$V_6 = \frac{\Delta x_6}{\Delta t_6} = \frac{3m - 12m}{6s - 5s} = -9 \text{m/s}$$

Calcular la velocidad media y la rapidez media de todo el movimiento.

Solución

Velocidad media:

$\Delta x = x_f - x_i$

$\Delta x = 3m - 0m = 3m$

$\Delta t = t_f - t_i$

$\Delta t = 6s - 0s = 6s$

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3m - 0m}{6s - 0s} = 0{,}5 \text{ m/s}$$

Rapidez media: Se debe calcular la distancia total recorrida.

$x = 9m + 0m + 3m + 0m + 6m + 9m = 27m$

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27m}{6s} = 4{,}5 \text{ m/s}$$

Ejercicios propuestos

1. Un cuerpo se desplaza de modo que su posición en función del tiempo está dada por la gráfica de la figura 2.12. ¿Cuál es el desplazamiento y la velocidad del móvil durante el intervalo entre: a) t = 0s y t = 4s; b) t = 4s y t = 7s; c) t = 7s y t = 12s?. ¿Cuál ha sido el desplazamiento total y la velocidad media entre t = 0s y t = 12s?.

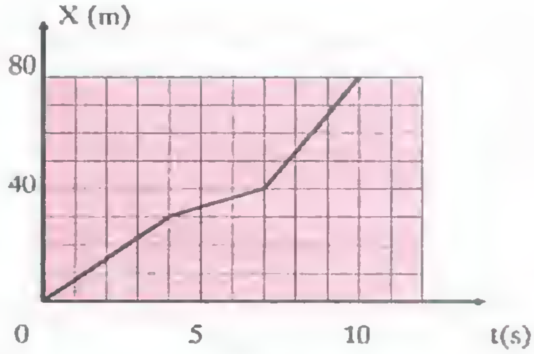


figura 2.12

2. En la gráfica 2.13 se indica el desplazamiento de un cuerpo en función del tiempo. Calcular la velocidad media entre: a) t = 2s y t = 4s, b) t = 9s y t = 11s; c) t = 12s y t = 15s. Calcular la velocidad cuando t = 4s, t = 11s y t = 14s. ¿Cómo se llaman estas velocidades?. ¿Cuál es el valor de la rapidez media de todo el movimiento?.

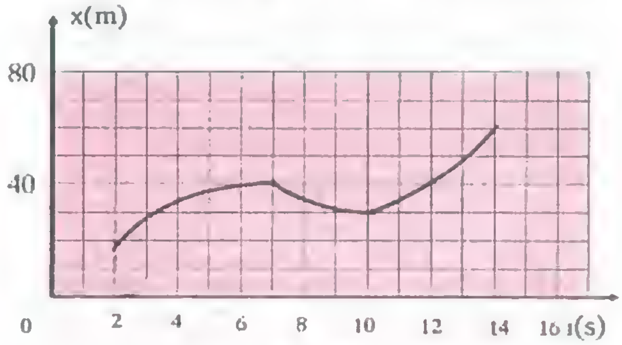


figura 2.13

3. En la figura 2.14 se muestra la gráfica posición tiempo de un cuerpo.

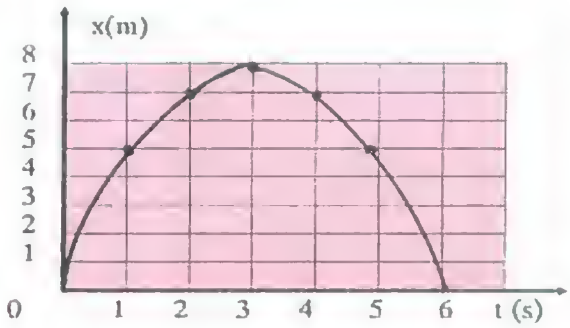


Figura 2.14

Calcular: a) La distancia total recorrida por la partícula en el intervalo de 0s y 6s; b) ¿Cuál es el desplazamiento entre 0s y 6s?; c) ¿Cuál es la velocidad media en los siguientes intervalos de tiempos: 0s y 3s; 3s y 6s; 1s y 5s; 2s y 6s; 0s y 5s; d) ¿Cuál es el valor de la rapidez media de todo el movimiento?

4. En la figura 2.15 se muestra una gráfica de la posición del móvil en función del tiempo. Determinar: a) la posición del móvil en los instantes 0s; 0,5s; 5s; 8s; 10s; b) Calcular las velocidades medias para los intervalos de tiempos:
t = 0,5s y t = 3s; t = 4s y t = 5s; t = 5s y t = 10s; t = 6s y t = 8s; t = 4,5s y t = 10s;
c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el móvil?; d) ¿Cuál es el desplazamiento total?.

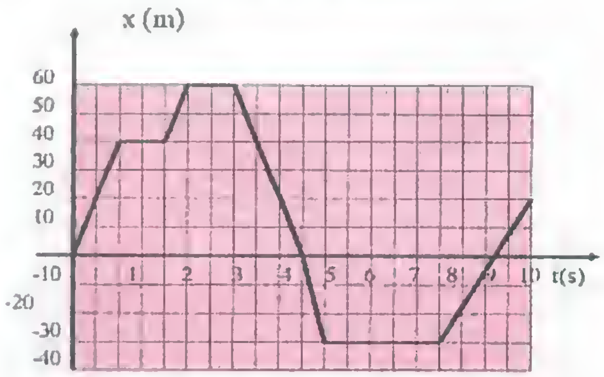


Figura 2.15

5. En la figura 2.16(a) se muestra una gráfica posición-tiempo que ilustra el movimiento de un cuerpo. Calcular: a) el desplazamiento total; b) la velocidad media en cada intervalo de tiempo; c) la velocidad media en todo el intervalo; d) la distancia total recorrida; e) la rapidez media en todo el intervalo.

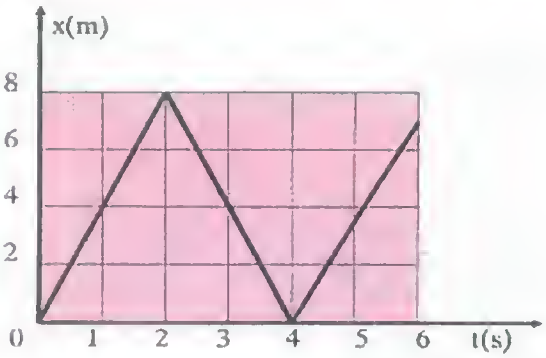


Figura 2.16(a)

2.10. Movimiento unidimensional. Movimiento uniforme.

Cuando una partícula de desplaza con velocidad constante a lo largo de una trayectoria rectilínea, se dice que estamos en presencia de un movimiento rectilíneo uniforme. Es rectilíneo porque su trayectoria es una línea recta y es uniforme porque permanece constante el módulo de la velocidad (rapidez) y la dirección del desplazamiento.

Gráficas del movimiento uniforme.

*** Gráfica posición-tiempo o gráfica x-t.**

La siguiente tabla de datos se obtiene al medir las diferentes posiciones que ocupa una partícula en intervalos de tiempos dados.

x(m)	0	40	80	120	160	200	240
t(s)	0	4	8	12	16	20	24

Tabla 2.2

A continuación procederemos a hacer una representación gráfica tomando las distancias en las ordenadas y el tiempo en las abscisas. A la gráfica que obtendremos se le llamará **gráfica (x-t)** o **gráfica de la posición en función del tiempo.**

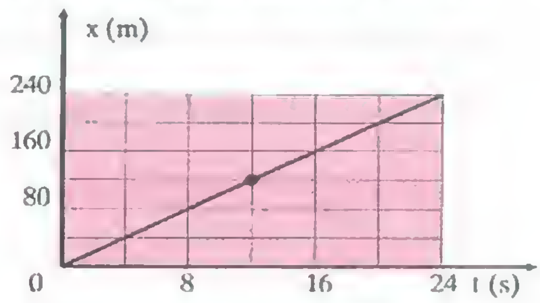


Figura 2.16(b)

En la gráfica obtenida, representada en la figura. 2.16(b) pueden observarse las características siguientes:

1. La gráfica es una recta que pasa por el origen.
2. **Las distancias recorridas por el móvil son directamente proporcionales a los tiempos.** De esto nos damos cuenta porque a medida que se duplica el tiempo, se duplica también la distancia. Si se triplica el tiempo, se triplican las distancias y así sucesivamente.

3. Veamos qué obtenemos al calcular la pendiente de la recta. Debemos tener el cuidado de usar las unidades. Seleccionaremos los puntos A y B situados sobre la recta:

$$m = \frac{160m - 80m}{16s - 8s} = \frac{80m}{8s} = 10\ \frac{m}{s}$$

Como puede notarse, este valor obtenido no es más que la rapidez del móvil, por lo que podemos concluir diciendo:

La pendiente de la recta en una gráfica (x-t) de un movimiento rectilíneo uniforme nos da el valor de la rapidez.

4. Puede obtenerse el valor de la distancia recorrida por el móvil en cada instante de tiempo sin necesidad de recurrir al cálculo.

* La distancia recorrida a los 8 s, lo vemos en el eje de las ordenadas que es de 80 m. Ver figura. 2.16(b).

* La distancia recorrida a los 10 s. es de 120 m.

Ecuaciones de rapidez y velocidad

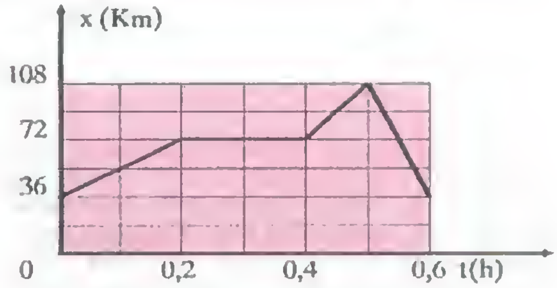
RAPIDEZ	VELOCIDAD
V = x / t	$\vec{V} = \vec{x} / t$
x: distancia recorrida	$\vec{x}$: desplazamiento
V: módulo de la velocidad (rapidez)	V: magnitud de la velocidad
t: tiempo transcurrido	t: tiempo transcurrido
magnitud escalar	magnitud vectorial

Unidades de rapidez

SISTEMA	UNIDAD
c.g.s	cm/s
M.K.S	m/s
Inglés	pie/s

Ejercicios resueltos.

1. Analiza la gráfica que se te da a continuación y responde las preguntas que se hacen.



Fifura 2.17

a) ¿Qué tipo de gráfica representa y cómo la reconoces?. b) ¿Cuál es la rapidez del móvil entre 0 h y 0,2 h?. c) ¿Cuál es la rapidez del móvil entre 0,2 h y 0,4 h?. d) De acuerdo a la respuesta anterior, ¿qué puedes concluir?. e) Calcula la rapidez del móvil en el segmento BC. f) Calcula la rapidez del móvil en el segmento CD. g) ¿Qué significa el signo negativo de la rapidez en el segmento CD?.h) ¿Qué distancia ha recorrido el móvil cuando han transcurrido 0,4 h. de movimiento?. i) ¿A qué distancia del punto de partida está a las 0,5 h.? j) ¿Qué distancia recorre entre los puntos B y C. k) ¿Qué significado físico tienen los cambios de dirección de la recta en los puntos A,B y C?.

Solución.

a) Representa una gráfica (x-t), porque las unidades en el eje de ordenadas y de abscisas son Km (distancia) y horas (tiempo).

b) La rapidez del móvil entre 0 h y 0,2 h la obtenemos calculando la pendiente de la recta en este intervalo.

$$V = \frac{72\ Km - 36\ Km}{0{,}2\ h - 0\ h} = \frac{36\ Km}{0{,}2\ h}$$

$$V = 180\ \frac{Km}{h}$$

c) La rapidez del móvil entre 0,2 h y 0,4 h, la obtenemos calculando el valor de la pendiente de la recta, en ese intervalo de tiempo.

$$V = \frac{72 \text{ Km} - 72 \text{ Km}}{0{,}4 \text{ h} - 0{,}2 \text{ h}} = \frac{0 \text{ Km}}{0{,}2 \text{ h}}$$

$$V = 0 \ \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

d) Como la recta es horizontal (paralela) al eje del tiempo y la pendiente es cero, concluimos diciendo que **toda recta paralela al eje de los tiempos en una gráfica (x-t) significa que el móvil tiene una rapidez nula. En otras palabras, significa decir que el móvil está detenido.**

e) La rapidez del móvil en el segmento BC es:

$$V = \frac{108 \text{ Km} - 72 \text{ Km}}{0{,}5 \text{ h} - 0{,}4 \text{ h}} = \frac{36 \text{ Km}}{0{,}5 \text{ h}}$$

$$V = 72 \ \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

f) La rapidez del móvil en el segmento CD es:

$$V = \frac{108 \text{ Km} - 36 \text{ Km}}{0{,}5 \text{ h} - 0{,}6 \text{ h}} = \frac{72 \text{ Km}}{-0{,}1 \text{ h}}$$

$$V = -720 \ \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

g) El signo negativo de la rapidez en CD significa que el móvil está regresando al punto de partida.

h) A las 0,4 horas de movimiento puede observarse que al punto B le corresponden 72 Km.

i) Observe que a las 0,5 horas el punto C tiene de ordenadas 108 Km y el punto de partida del móvil tiene de ordenada 36 Km. Notemos que entre 36 Km y 108 Km hay 72 Km. Como el móvil salió de 36 Km se tendrá que la distancia recorrida es:

108 Km - 36 Km = 72 Km

j) Observe que el punto B tiene de ordenada 72 Km y el punto C tiene de ordenada 108 Km:

108 Km - 72 Km = 36 Km

k) Significa que el móvil cambia de rapidez.

*** Gráfica velocidad-tiempo o gráfica (V-t).**

Si tomamos valores instantáneos de la rapidez en un móvil que se desplaza con rapidez constante, obtenemos la siguiente tabla de datos:

V(Km/h)	80	80	80	80	80	80	80
t(h)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Tabla 2.3

A continuación procedemos a hacer una representación gráfica tomando los valores de rapidez en el eje de ordenadas y los valores del tiempo en el eje de abscisas. A la gráfica que se obtenga se le llamará **gráfica (V-t) o gráfica de la rapidez en función del tiempo.** Ver la figura. 2.18.

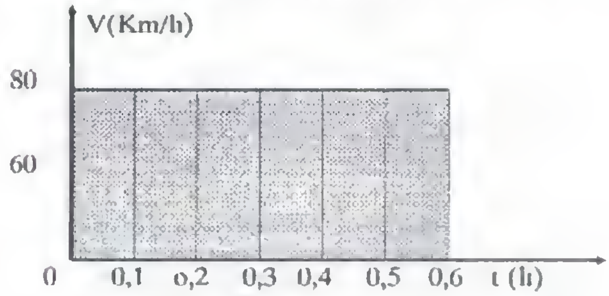


Figura 2.18

En la gráfica obtenida pueden observarse las características siguientes:

1. **La gráfica obtenida es una recta horizontal, paralela al eje de los tiempos.** Como puede notarse, el valor 80 Km/h permanece constante a través del recorrido.

2. **La rapidez del móvil en cada instante puede determinarse observando en el eje de ordenadas la rapidez que corresponde a cada intervalo de tiempo.**

3. Obsérvese, que la figura limitada por la gráfica, las ordenadas inicial y final y el eje de las abscisas es **un rectángulo cuya base es el tiempo y la altura la rapidez.** Para calcular la

distancia recorrida a las 0,6 horas, bastará con calcular el **valor numérico del área de la figura formada**, que en este caso es un rectángulo.
Datos del rectángulo

base (b) = 0,6 horas

altura (h) = 80 Km/h.; luego:

$X = b \cdot h = 0{,}6 \text{ h} \cdot 80 \text{ Km/h} = 48 \text{ Km}$

Problema analítico de movimiento uniforme.

Dos automóviles distantes entre sí 200 Km se dirigen simultáneamente uno hacia el otro con rapidez de 60 Km/h y 40 Km/h respectivamente, ¿Dónde y cuándo se cruzan?.

Solución

Para ayudarnos en la comprensión del problema, haremos un diagrama como el indicado en la figura 2.19. El móvil A se dirige hacia B, y el móvil B se dirige hacia A.

Sea P el punto donde se cruzan y llamemos X_A la distancia AP. La distancia PB = 200 - X_A.

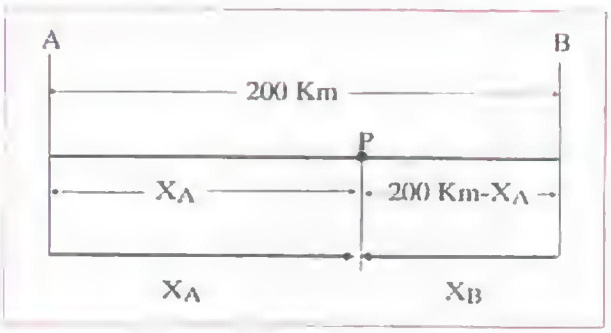


Figura 2.19

La distancia recorrida por cada móvil será:

$X_A = V_A \cdot t$ .... [1]

$X_B = V_B \cdot t$ .... [2]

Por otra parte, sabemos que:

$V_A = 60 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}}$ $\qquad V_B = 40 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}}$

y $X_B = 200 \text{ Km} - X_A$

Sustituyendo estos valores en [1] y [2], tenemos:

$X_A = 60 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot t$ .... [3]

$200 \text{ Km} - X_A = 40 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot t$ .... [4]

Si sustituimos [3] en [4] se tendrá que:

$$200 \text{ Km} - 60 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot t = 40 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot t$$

Agrupando t nos queda:

$$200 \text{ Km} = 60 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot t + 40 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot t$$

$$200 \text{ Km} = 100 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot t \quad \text{de donde,}$$

$$t = \frac{200 \text{ Km}}{100 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}}} = 2 \text{ h}$$

Sustituyendo t = 2 h en [3] encontramos que:

$$X_A = 60 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot 2 \text{ h, de donde:}$$

$$X_A = 120 \text{ Km}$$

Respuestas

Tardan 2 horas en encontrarse, y X_A = 120 Km. ; X_B = 80 Km

Otra forma de resolver este problema.

Las ecuaciones de la distancia recorrida para cada móvil son:

$X_A = V_A . t$ y $X_B = V_B . t$

Como $X_B = 200$ Km - X_A y

$V_B = 40$ Km/h

$V_A = 60$ Km/h

Se tendrá al sustituir que:

$X_A = 60$ Km/h . t .... [1]

200 Km - $X_A = 40$ Km/h . t .. .. [2]

Sumando miembro a miembro [1] y [2], tenemos:

$X_A + 200$ Km - $X_A = 100$ Km/h . t

200 Km = 100 Km/h . t

Despejando t nos queda:

$$t = \frac{200 \text{ Km}}{100 \dfrac{\text{Km}}{\text{h}}} = 2 \text{ h.}$$

Las distancias se buscan de la misma forma que en el primer problema resuelto.

Problemas propuestos. Movimiento uniforme.

1. A continuación se te da una tabla de datos que representa las posiciones ocupadas por un móvil en función del tiempo.

x(cm)	100	80	60	40	40	40	70	100	130	40
t(s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9

a) Construye la gráfica (X-t). b) Calcula la rapidez en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo: 0 y 0,3 s; 0,3 y 0,5 s; 0,5 y 0,8 s; 0,8 y 0,9 s. c) ¿A qué distancia del punto de partida está a los 0,8 s?. d) ¿Cuál es la distancia total recorrida?. e) ¿Cuál es el desplazamiento total?. f) Partiendo de la gráfica (X-t), construye la gráfica (V-t).

2. Un vehículo se desplaza de acuerdo al gráfico de la figura 2.20.

a) ¿Crees que existe movimiento entre 0,4 y 0,8 h?. Explica tu respuesta. b) ¿Qué significa el hecho de que la recta representativa del

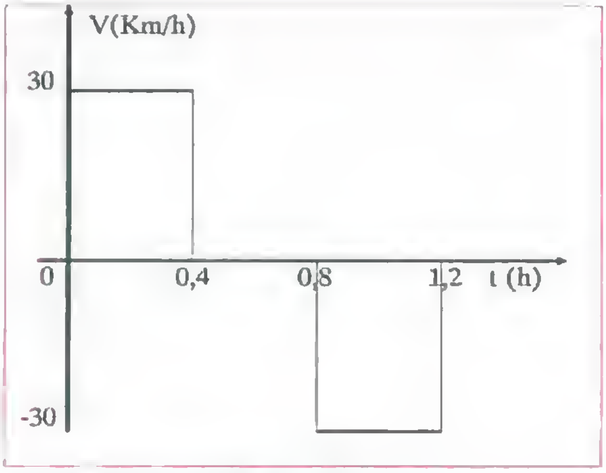


Figura 2.20

movimiento entre 0,8 y 1,2 h esté debajo del eje de los tiempos?. c) ¿Cuál es la distancia recorrida por el móvil entre 0 y 1,2 h?. d) ¿Cuál sería el desplazamiento? e) Construye la gráfica (X-t).

3. A continuación se da la gráfica posición-tiempo del desplazamiento de un automóvil. (figura. 2.21)

a) Calcula la rapidez entre 0 y 0,5 h. b) ¿Qué sucede entre 0,5 y 1 h?. c) Calcular la pendiente

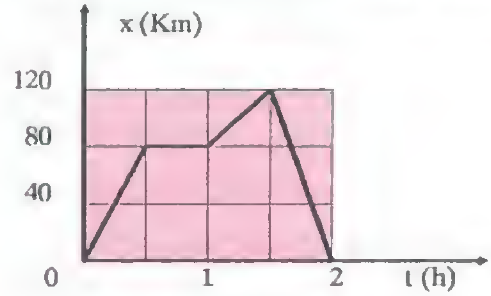


Figura. 2.21

entre 1 h y 1,5 h. d) Calcular la pendiente entre 1,5 y 2 h. e) ¿Qué representan los valores obtenidos en c y d?. f) Construye la gráfica (V-t).

4. Dos ciudades A y B están separadas por una distancia de 260 Km. De A hacia B parte un tren que se mueve con una rapidez de 80 Km/h. Simultáneamente parte desde B hacia A, otro tren con una rapidez de 50 Km/h. Calcular analítica y gráficamente al cabo de cuánto tiempo se en-

cuentran los trenes; así como la distancia que en dicho instante los separa de A.

R: 2 h ; 160 Km.

5. Desde Barquisimeto hacia Caracas sale un automóvil con una rapidez de 180 Km/h. Simultáneamente parte desde Caracas a Barquisimeto otro automóvil con una rapidez de 150 Km/h. Calcular analitica y gráficamente al cabo de cuánto tiempo se encuentran los automóviles, así como la distancia que en dicho instante los separa de Barquisimeto. Sabiendo que la distancia que hay desde Barquisimeto a Caracas es de 360 Km. Calcular además cuánto tiempo tarda el móvil que parte de Barquisimeto en llegar a Caracas.

R: 1,09 h: 196,2 km; 2 h

6. Dos ciudades A y B están separadas por una distancia de 130 Km. Desde A parte un móvil hacia B con una rapidez de 40 Km/h; y desde B parte hacia A otro móvil con una rapidez de 25 Km/h. Calcular analítica y gráficamente al cabo de cuánto tiempo se encuentran los móviles y la distancia que los separa de la ciudad A.

R: 2 h; 80 Km.

7. Desde una ciudad A parte un tren hacia otra ciudad B, con una rapidez de 80 Km/h. En el mismo instante parte otro de la ciudad B hacia la ciudad A con una rapidez de 100 Km/h. Si la distancia entre las dos ciudades es de 340 Km. Calcular: a) La distancia de la ciudad A al lugar de encuentro. b) El tiempo que tardan en encontrarse

R: a) 150,4 Km; b) 1,88 h.

8. Un ciclista parte de un lugar y después de avanzar con velocidad constante de 45 Km/h durante media hora, descansa durante 10 minutos y regresa al punto de partida con velocidad constante en 45 minutos. Representar las correspondientes gráficas velocidad tiempo y posición tiempo.

9. De una ciudad parte un auto con una rapidez de 60 Km/h y una hora más tarde parte de la misma ciudad otro auto con una rapidez de 90 Km/h. Calcular: a) La distancia de la ciudad al lugar del encuentro. b) El tiempo que tarda el segundo auto para alcanzar al primero.

R: a) 180 Km; b) 2 horas.

10. Un móvil sale de un punto con una rapidez de 40 Km/h, al cabo de 40 horas se detiene en otro punto durante 10 horas, y luego regresa al punto de partida con una rapidez de 20 Km/h. Determinar gráficamente el tiempo empleado en el retorno.

2.11. Aceleración media e instantánea

Aceleración media

Si el movimiento es rectilíneo uniformemente variado (figura. 2.22(a)) la velocidad instantánea del móvil se conserva en dirección, no así en magnitud.

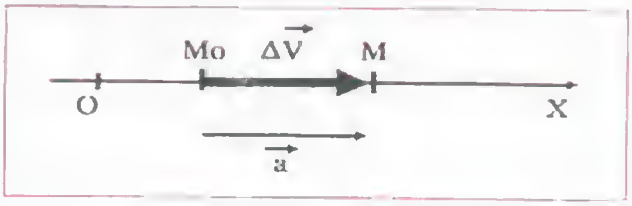


Figura 2.22(a)

Si la velocidad varia de V_o al tiempo de t_o hasta un valor V al tiempo t, puede definirse el **vector aceleración media** como la razón entre la variación del vector velocidad instantánea ΔV y el intervalo de tiempo transcurrido Δt.

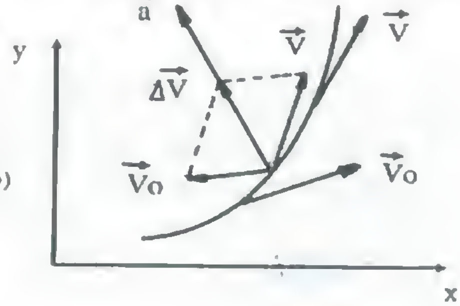
$$\Delta V = V - V_o \;\; y \;\; \Delta t = t - t_o$$

Esto nos permite escribir que:

$$a = \frac{V - V_o}{t - t_o} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Si el movimiento no es rectilíneo, como en el caso del movimiento circular uniforme, figura. 2.22(b), la dirección del vector velocidad instantánea cambia continuamente con el tiempo(trayectoria curva); no así su magnitud, la cual permanece constante. En este caso se produce una aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia. Esta aceleración será tratada más adelante.

Figura 2.22(b)



Aceleración instantánea.

En cierto instante, podemos definir el vector aceleración instantánea, como la razón de la variación de la velocidad y el intervalo de tiempo cuando éste tiende a cero.

Es el valor límite que toma la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$a = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{cuando } \Delta t \quad 0$$

2.12 Ecuaciones del movimiento rectilíneo unidimensional con aceleración constante

Ecuación de la rapidez en función del tiempo. Si partimos de la ecuación de la aceleración media tenemos que:

$$\vec{a} = \frac{\vec{V} - \vec{V_o}}{t - t_o}$$

Tomando los módulos de los vectores y haciendo $t_o = 0$, nos queda que:

$$a = \frac{V - V_o}{t}$$

Escribiéndola en forma lineal:

$$V - V_o = a \cdot t$$

Despejando V nos queda:

$$\boxed{V = V_o + a \cdot t}$$

Esta expresión nos permite calcular la velocidad en cualquier instante t, si conocemos la velocidad inicial, la aceleración y el tiempo.

Ecuación de la distancia en función de la aceleración y del tiempo.

La distancia "X" recorrida por el cuerpo desde el momento inicial hasta el momento "t" la podremos obtener mediante el área bajo la gráfica (V-t), tal y como lo aprendimos en cursos anteriores. La ecuación $V = V_o + a.t$ indica que la velocidad varía linealmente con el tiempo con "V" y "t" variables, "V_o" y "a" constantes.

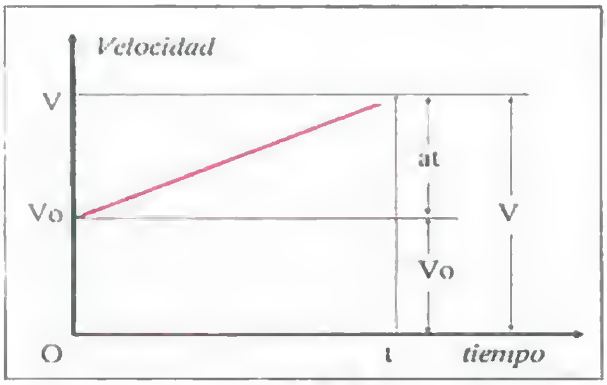


Figura. 2.23

El valor numérico del área de la figura viene dada por el área del trapecio.

Datos
$$\boxed{\begin{array}{l} B = V_o + at \\ b = V_o \\ h = t \end{array}}$$

Sustituyendo en la fórmula $X = \frac{(B + b)h}{2}$

se tiene que:

$$X = \frac{(V_o + at + V_o)t}{2} = \frac{(2V_o + at)t}{2}$$

Si aplicamos la propiedad distributiva, tenemos que:

$$X = \frac{2 V_o t + at^2}{2}$$, que puede escribirse como,

$$X = \frac{2V_o t}{2} + \frac{at^2}{2}$$, de donde

$$\boxed{X = V_o t + \frac{at^2}{2}}$$

Esta ecuación nos permite calcular la distancia recorrida en el movimiento uniformemente acelerado, con rapidez inicial.

Si el móvil parte del reposo, se tiene que: $V_o = 0$, por lo que la ecuación anterior se transforma en:

$$X = 0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$$, quedándonos

$$X = \frac{at^2}{2}$$

Esta, es la ecuación de la distancia en el movimiento uniformemente acelerado sin rapidez inicial.

Ecuación de la velocidad en función de la aceleración y la distancia

Partamos de dos expresiones conocidas:

$$V = V_o + a \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

$$X = V_o \cdot t + \frac{at^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

Si despejamos t de la ecuación [1], obtenemos que:

$$t = \frac{V - V_o}{a}$$

Sustituyendo "t" en la ecuación [2], nos queda:

$$X = V_o\left(\frac{V - V_o}{a}\right) + a \cdot \frac{\left(\frac{V - V_o}{a}\right)^2}{2}$$

$$X = \frac{V_o(V - V_o)}{a} + a \cdot \frac{(V - V_o)^2}{2a^2}$$

$$X = \frac{V_o(V - V_o)}{a} + \frac{(V - V_o)^2}{2a}$$

$$X = \frac{2V_o(V - V_o) + (V - V_o)^2}{2a}$$

$$X = \frac{2V_oV - 2V_o^2 + V^2 - 2VV_o + V_o^2}{2a}$$

$$X = \frac{V^2 - V_o^2}{2a}$$

Eliminando denominadores, tenemos que:

$$2ax = V^2 - V_o^2$$

Despejando V^2 nos queda:

$$V^2 = V_o^2 + 2ax$$

Esta expresión nos permite calcular la velocidad final si conocemos la velocidad V_o y la distancia recorrida.

Observaciones:

1. Cuando el movimiento es uniformemente acelerado, puede ocurrir que la velocidad inicial (V_o) sea nula. Si esto ocurre, decimos que el móvil ha partido del reposo. Esto trae como consecuencia que las ecuaciones anteriores pueden escribirse así:

$$V = at$$

$$X = \frac{at^2}{2}$$

$$V^2 = 2ax$$

2. Recuerde que cuando el movimiento es uniformemente retardado, la aceleración es negativa. Este hecho debe tomarse en cuenta al hacer uso de las ecuaciones iniciales.

Ecuación del tiempo máximo.

Se llama tiempo máximo al **tiempo transcurrido desde el momento en que un móvil inicia un movimiento uniformemente retardado, hasta detenerse.**

Consideremos un móvil, tal y como lo indica la figura, que se desplaza a 60 m/s en el momento en que inicia M.U.R. a partir de A.

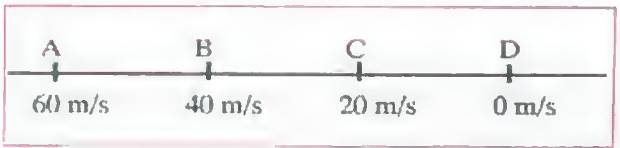


Figura 2.23(a)

Supongamos que tarda 8 segundos en ir desde la posición A hasta la posición D, donde se detiene.

Esos 8 segundos transcurridos en ir desde A hasta D constituyen el **tiempo máxi...**"

Nótese que la velocidad final del movimiento desde A hasta D es V = 0, por lo que podemos hacer V = 0 en la ecuación:

$V = V_o + at$

Convirtiéndose t en $t_{máx}$ y quedándonos:

$0 = V_o + at_{máx}$

$-V_o = at_m$

Despejando $t_{máx}$ se tiene:

$$\boxed{t_{máx} = -\frac{V_o}{a}}$$

Esta última es la ecuación del **tiempo máximo**

• Ecuación del desplazamiento máximo

Se llama desplazamiento máximo, al desplazamiento alcanzado por un móvil durante el tiempo máximo.

Si hacemos V = 0 en la ecuación

$V^2 = Vo^2 + 2\,a\,X$

entonces X se hace $X_{máx}$, quedándonos que:

$0 = Vo^2 + 2\,a\,x_{máx}$; luego

$$\boxed{X_{máx} = -\frac{Vo^2}{2a}}$$

Problemas resueltos

1. Un automóvil tiene una velocidad de 60 Km/h. Cuando frena disminuye su velocidad a 15 Km/h en 4 segundos. a) ¿Cuál es la aceleración?; ¿Cuánto recorre en el cuarto segundo?.

Datos:

$$V_o = 60\,\frac{Km}{h}\ a\ \frac{m}{s} = \frac{60.000\ m}{3.600\ s}$$

$$Vo = 16{,}6\,\frac{m}{s}$$

$t = 4\ s$

$$V = 15\,\frac{km}{h}\ a\ \frac{m}{s} = \frac{15.000m}{3.600s}$$

$$= 4{,}16\,\frac{m}{s}$$

$a = ?$

X = ? en el cuarto segundo

Solución:

a) La ecuación viene dada por:

$$a = \frac{V - V_o}{t}$$

$$a = \frac{4{,}16\,\frac{m}{s} - 16{,}6\,\frac{m}{s}}{4\ s}$$

$a = -3{,}11\ m/s^2$

b) Para obtener el recorrido durante el cuarto segundo, bastará con hacer la diferencia del recorrido en el cuarto segundo (X_4) menos el recorrido en el tercer segundo (X_3) .

$X_4 - X_3$.

$$X_4 = Vot + \frac{1}{2}\,at^2 \qquad \text{con } t = 4\ s$$

$$X_4 = 16{,}6\frac{m}{s} \,.\, 4\ s + \frac{1}{2}\,(-3{,}11 m/s^2).16\ s^2$$

$X_4 = 66{,}4\ m - 24{,}88\ m$

$X_4 = 41{,}52\ m$

$$X_3 = 16{,}6\,\frac{m}{s}\ .\ 3\ s + \frac{1}{2}\,(-3{,}11m/s^2)\ .\ 9\ s^2$$

$X_3 = 49{,}8\ m - 13{,}9\ m$

$X_3 = 35{,}9\ m$

Luego,

$X_4 - X_3 = 41{,}52\ m - 35{,}9\ m = 5{,}62\ m$

2. Un móvil que ha partido del reposo inicia un M.U.A. con una aceleración de 2 m/s^2 que mantiene durante 10 s. Finalizado este tiempo se desplaza con velocidad constante durante 8 s para finalmente aplicar los frenos y detenerse en 20 s. Calcular el desplazamiento total realizado.

Solución:

Haremos un diagrama, como lo indica la figura 2,24, donde se muestran las condiciones del problema.

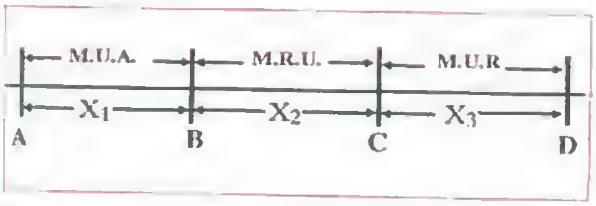


Figura 2.24

Partiendo del reposo en el punto A realiza un M.U.A. hasta llegar al punto B. El primer desplazamiento en el tiempo viene dado por la ecuación:

$$X_1 = \frac{1}{2}\ at^2$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\ .2\ m/s^2\ (10s)^2$$

$$X_1 = 100\ m$$

Desde B hasta C se desplaza con velocidad constante. Esta velocidad es la final del movimiento AB.

$$V = a.t_1 = 2\frac{m}{s^2}\ 10\ s = 20\ \frac{m}{s}$$

El desplazamiento X_2 comprendido entre B y C viene dado por la ecuación del desplazamiento con velocidad constante.

$$X_2 = V\ .\ t_2$$

$$X_2 = 20\frac{m}{s}\ .\ 8\ s = 160\ m$$

El desplazamiento CD no es más que el desplazamiento máximo, porque realiza un M.U.R. hasta que se detiene.

$$X_3 = -\frac{Vo^2}{2a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Como no conocemos la aceleración debemos calcularla a través del tiempo máximo.

$$t_{máx} = -\frac{V_o}{a}\ ;\quad a = \frac{V_o}{t_{máx}}$$

Sustituyendo los valores, tenemos que:

$$a = -\frac{20\ \frac{m}{s}}{20\ s} = -1\ \frac{m}{s^2}$$

Sustituyendo en (1) se tiene que:

$$X_3 = -\frac{(20\ m/s)^2}{2(-1\ m/s^2)} \doteq 200\ m$$

El desplazamiento total es:

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

$$X = 100\ m + 160\ m + 200\ m$$

$$X = 460\ m$$

3. Un móvil que se desplaza con aceleración constante, tarda 5 s en pasar por dos puntos distantes entre sí 80 m. Si la velocidad al pasar por el segundo punto es de 20 m/s; calcular: a) la aceleración; b) la velocidad cuando pasó por el primer punto.

Solución:

Hagamos un diagrama representativo de las condiciones del problema (figura.2.25) donde A representa el primer punto y B representa el segundo punto.

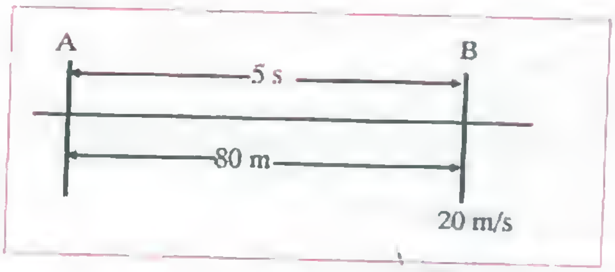


Figura 2.25

El móvil en el punto A tiene una velocidad que desconocemos y que llamaremos V_A. Como se conoce la velocidad en B, que llamaremos V_B, podemos escribir que la aceleración viene dada por:

$$a = \frac{V_B - V_A}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, el desplazamiento entre los puntos A y B viene dado por la ecuación:

$$X = V_A.t + \frac{at^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) nos queda:

$$X = V_A.t + \frac{\frac{(V_B - V_A)}{t}.t^2}{2}$$

$$X = V_A.t + \frac{(V_B - V_A).t}{2}$$

Sustituyendo X = 80 m, V_B = 20 m/s y t = 5 s, nos queda:

$$80\ m = V_A.5\ s + \frac{(20\ m/s - V_A).5\ s}{2}$$

$$80\ m = 5V_A.s + \frac{100\ m - 5\ V_A\ s}{2}$$

Eliminando denominadores nos queda:

$$160\ m = 10\ V_A.s + 100\ m - 5\ V_A.s$$

$$160\ m - 100\ m = 10V_A.s - 5\ V_A.s$$

$$60\ m = 5\ V_A.s$$

$$V_A = \frac{60\ m}{5\ s}$$

$$V_A = 12\ \frac{m}{s}$$

La aceleración la obtenemos por la ecuación (1)

$$a = \frac{(20\ \frac{m}{s} - 12\ \frac{m}{s})}{5\ s}$$

$$a = 1{,}6\ m/s^2$$

4. Un cuerpo se desplaza en línea recta con una velocidad constante de 144 Km/h y a partir de un instante dado comienza a disminuir su velocidad uniformemente con aceleración de 6 m/s^2. ¿Cuánto tarda el cuerpo en realizar un desplazamiento de 60 m?.

Solución:

Datos:

$$V_o = 144\ \frac{Km}{h} = \frac{144.10^3 m}{3.600\ s}$$

$$V_o = 40\ m/s$$

$$a = -6m/s^2$$

$$t = ?$$

$$X = 60\ m$$

Nótese que el desplazamiento realizado es con velocidad inicial, por lo que debemos usar la ecuación:

$$X = V_o t + \frac{at^2}{2}$$

Sustituyendo valores, tenemos:

$$60\ m = 40\ \frac{m}{s}.t + \frac{(-6\ m/s^2)t^2}{2}$$

Simplificando y prescindiendo de las unidades, se tiene:

$$60 = 40\ t - 3\ t^2$$

$$3\ t^2 - 40\ t + 60 = 0$$

Esta ecuación de segundo grado debemos resolverla usando su fórmula:

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4(3).60}}{2.3}$$

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 720}}{6}$$

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{29{,}66}}{6}$$

Encontrando los valores para t_1 y t_2 se tiene que:

$t_1 = 11{,}6$ s.

$t_2 = 1{,}72$ s.

El tiempo que tarda en detenerse es el tiempo máximo que viene dado por:

$$t_{máx} = -\frac{V_o}{a}$$

$$t_{máx} = -\frac{40\ m/s}{-6\ m/s^2} = 6{,}6\ s$$

Luego, entre $t_1 = 11{,}6$ s. y $t_2 = 1{,}72$ s, usamos: $t_2 = 1{,}72$ s. que es el tiempo que tarda en recorrer los 60 m.

No tomamos $t_1 = 11{,}6$ s. porque el tiempo que tarda en detenerse es menor.

Problemas propuestos.

1. Un tren tiene una velocidad de 43,3 Km/h. Los frenos se ponen en acción y obtiene una aceleración de -1,22 m/s^2. Hallar: a) ¿ Cuánto tiempo transcurrió antes de detenerse?. b) la distancia recorrida hasta detenerse. c) la distancia recorrida durante el quinto segundo después que se ponen los frenos en acción.

R: a) 9,85 s b) 59,21 m c) 21,89 m

2. Un cuerpo que parte del reposo tiene una aceleración constante que le permite recorrer 9 m en 3 s. ¿Cuánto tiempo tardará en adquirir una velocidad de 24 m/s desde que comenzó a moverse?.

R: 12 s.

3. La velocidad de un tren se reduce uniformemente de 12 m/s a 5 m/s. Sabiendo que durante ese tiempo recorre una distancia de 100 m. Calcular: a) la aceleración. b) la distancia recorrida desde el momento en que tiene 5 m/s hasta detenerse, sabiendo que continúa con la misma aceleración.

R: a) - 0,595 m/s^2 ; b) 21 m.

4. Un móvil que en un momento dado se desplaza a 20 m/s inicia un M.U.A., el cual mantiene durante 8 s, al final de los cuales tiene una velocidad de 32 m/s. A partir de este momento se desplaza durante 12 s con velocidad constante. ¿Cuál es el desplazamiento total?

R: 592 m.

5. Un móvil que parte del reposo inicia un M.U.A. con una aceleración de 1,2 m/s^2 durante 20s. Finalizado este tiempo se desplaza durante 8 s con velocidad constante, para luego aplicar los frenos y adquirir una aceleración retardatriz de 0,8 m/s^2 hasta detenerse. Calcular: a) El desplazamiento total recorrido. b) El tiempo que estuvo en movimiento.

R: a) 792 m.; b) 58 s.

6. El chofer de un automóvil que se mueve con una velocidad de 72 Km/h ve la luz roja en el semáforo y aplica los frenos. Después de aplicados los frenos, el automóvil comienza a disminuir su velocidad, moviéndose con una aceleración de -5 m/s^2. a) ¿ qué distancia recorrió el automóvil al cabo de 2 s de haberse aplicado los frenos?. b) ¿qué distancia recorrió hasta detenerse?.

R: a) 30 m; b) 40 m.

7. Un automóvil se detuvo en un semáforo. Después de encendida la luz verde, comienza a moverse con una aceleración de 1,5 m/s^2 hasta alcanzar una velocidad de 16 m/s; después continúa moviéndose con velocidad constante. ¿ A qué distancia del semáforo se encontrará el auto después de 15 s de haberse proyectado la luz verde?.

R: 154,66 m.

8. Un avión para despegar de la tierra debe poseer una velocidad de 180 Km/h. ¿ A qué distancia del punto de partida se encontrará el avión cuando alcance esta velocidad, si recorre la pista con una aceleración de 2,5 m/s^2?.

R: 500 m

9. Un móvil que parte del reposo inicia un M.U.A. con una aceleración de 4 m/s^2. Cuando han transcurrido 10 s de la salida del primero, sale otro móvil con una aceleración de 9 m/s^2. Calcular al cabo de cuánto tiempo y a qué distancia del punto de partida alcanza el segundo al primero.

R : 20 s; 1800 m.

10. Un vehículo parte del reposo e inicia un M.U.A. desplazándose durante 15 s con una

aceleración de 1 m/s^2. Finalizado éste tiempo se desconecta el motor y continúa moviéndose durante 3 s con una aceleración retardatriz de -2,5 m/s^2. Finalmente se aplican los frenos, deteniéndose en 5 s. ¿Cuál es la distancia total recorrida?.

R: 165 m.

11. Un móvil inicia un M.U.A. con una velocidad de 25 m/s. Si la aceleración del móvil es -2 m/s^2. Calcular: a) la distancia que recorre hasta el momento en que la velocidad adquiera el valor de 15 m/s. b) el tiempo que dura el movimiento hasta que se detiene. c) ¿qué distancia recorre hasta detenerse?.

R: a) 100 m; b) 12,55 s ; c) 156,25 m.

12. Un móvil que se desplaza con aceleración constante, tarda 5s. en pasar por dos puntos distantes 80 m. La velocidad que posee al pasar por el segundo punto es 20 m/s. Calcular: a) la aceleración. b) la velocidad cuando pasó por el primer punto.

R: a) 1,6 m/s^2; b) 12 m/s.

13. Un móvil parte del reposo desde un punto A con una aceleración de 0,8 m/s^2 y más adelante pasa entre dos puntos B y C distantes entre sí 20 m en un intervalo de tiempo de 5 s. Calcular: a) la velocidad al pasar por cada punto. b) el tiempo que tarda en ir desde A hasta B. c) la distancia desde A hasta B.

R: a) 2 m/s; 6 m/s b) 2,5 s c) 2,5 m

14. Un móvil que se desplaza a 64,8 Km/h inicia un M.U:R: con aceleración de 1,2 m/s^2. Calcular: a) el desplazamiento realizado cuando la velocidad tenga un valor de 6 m/s. b) el tiempo que tarda en realizar dicho desplazamiento. c) el tiempo que tarda en detenerse. d) el desplazamiento realizado hasta detenerse.

R: a) 120 m; b) 10 s; c) 15 s; d) 135 m.

15. Un automóvil que ha partido del reposo, tarda 2 s en pasar entre dos puntos A y B, distantes 24 m con aceleración constante. Su velocidad al pasar por el punto B es de 14,4 m/s. Encuentre: a) su aceleración, b) la velocidad cuando pasa por el punto A, c) la distancia desde el punto de partida hasta el punto A.

R: a) 2,4 m/s^2 b) 9,6 m/s c) 19,2 m

16. En el instante que una señal de un semáforo cambia a verde, un automóvil que ha estado esperando, parte con una aceleración constante de 1,8 m/s^2. En ese mismo instante un camión que lleva una velocidad constante de 9 m/s alcanza y pasa al automóvil. Encuentre: a) ¿a qué distancia del punto de partida adelantará el automóvil al camión?; b) ¿ qué velocidad tendrá en ese instante?

R: a) 90 m. ; b) 18 m/s

17. Se da la siguiente tabla de datos a) Construye la gráfica (V,t); b) calcula la distancia que recorre el móvil durante los primeros 2 segundos; c) ¿qué distancia recorre en todos los 8 segundos?; d) calcula la aceleración entre t = 0 s y t = 4 s; e) calcula la aceleración entre t = 5 s y t = 7 s; f) construye la gráfica aceleración-tiempo.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
V(m/s)	0	4	8	12	16	20	20	20	20

Tabla 2.5

18. Un móvil se desplaza durante 40 s con una rapidez constante de 10 m/s. Finalizando éste tiempo se detiene durante 30 s para luego continuar durante 20 s con una rapidez de -10 m/s y finalmente se mueve 10 s con una rapidez de -20 m/s. a) Construye una gráfica (x,t); b) ¿cuál es la distancia total recorrida?; c) construye una gráfica (V,t); d) ¿cuál es el desplazamiento total?.

19. En la figura. 2.26 se da una gráfica (v-t) de un movimiento rectilíneo.

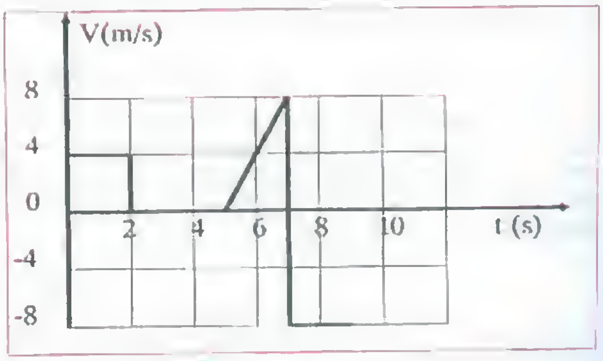


Figura 2.26

a) Durante que intervalos de tiempo permanece constante la velocidad. b) Durante qué intervalo permanece en reposo. c) ¿cuál es la distancia total recorrida?. d) ¿cuál es el desplazamiento?. e) construye una gráfica (x,t).

20. En la figura 2.27 se da una gráfica (V,t) de un movimiento variado.

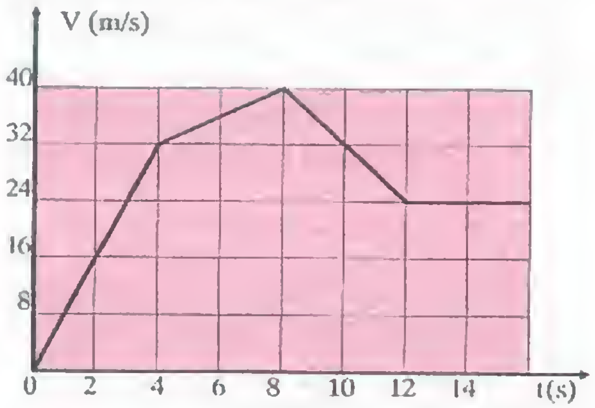


Figura 2.27

Calcula la aceleración entre a) 0 s y 4 s; b) 4 s y 8 s; c) 8 s y 12 s; d) calcula la distancia total recorrida; f) construye la gráfica aceleración-tiempo.

Autoevaluación 2.

Movimientos horizontales.

A. Selecciona y escribe en tu cuaderno la alternativa correcta:

1. Si la aceleración de una partícula en movimiento es cero, nos indica que la partícula:
a) tiene rapidez constante
b) está en reposo
c) tiene aceleración constante
d) describe una recta.

2. El desplazamiento de una partícula en movimiento está representado por:
a) el vector posición
b) la distancia recorrida
c) el vector dirigido desde la posición inicial hasta la posición final
d) la variación de dirección del vector posición.

3. La distancia recorrida y el desplazamiento son tales que:
a) ambos son vectoriales
b) siempre coinciden
c) el desplazamiento es magnitud vectorial y la distancia es escalar
d) coinciden con la trayectoria.

4. El conjunto de posiciones ocupadas por la partícula durante su movimiento se llama:
a) vector posición
b) trayectoria;
c) desplazamiento
d) distancia recorrida.

5. La razón entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo correspondiente se llama:
a) velocidad instantánea
b) aceleración media
c) velocidad media
d) rapidez media.

6. Un auto viaja 200 Km, en línea recta y luego regresa 100 Km y demora un tiempo de 5 horas en todo el recorrido. Se movió con una velocidad media de:
a) 60 Km/h
b) 20 Km/h
c) 40 Km/h
d) 30 Km/h.

7. La rapidez media del auto del problema anterior es:
a) 20 Km/h
b) 60 Km/h
c) 30 Km/h
d) 40 Km/h.

8. Un móvil que se desplaza a 12 m/s inicia un M.U.A. de aceleración 1,2 m/s^2. Al recorrer 100 m tendrá una rapidez de:
a) 19,59 m/s
b) 384 m/s
c) 15,49 m/s
d) 132 m/s.

9. El cambio de dirección de la recta en una gráfica (V,t) significa que:
a) el móvil varió de dirección.
b) hubo cambio de aceleración.
c) el móvil cambió de trayectoria.
d) el móvil cambió el sentido del movimiento.

10. El tiempo máximo ocurre cuando el móvil realiza un:
a) M.U.A.
b) M.R.U.
c) M.U.R.
d) M.U.R. hasta detenerse.

11. El vector dirigido desde el origen de coordenadas hasta un punto donde se encuentra la partícula en su movimiento se llama:

a) vector desplazamiento.
b) vector posición.
c) la trayectoria.
d) vector velocidad.

12. El valor numérico del área bajo la curva en una gráfica (V,t) nos da:
a) la distancia recorrida
b) la rapidez
c) la aceleración
d) la velocidad media.

B. A continuación se te presentan varias afirmaciones entre falsas y verdaderas. Dí cuáles son falsas y cuáles verdaderas. Explica tu respuesta.

13. Los términos distancia y desplazamiento son sinónimos.

14. En un movimiento uniforme, la aceleración es siempre distinta de cero.

15. Rapidez media y velocidad media tienen el mismo significado.

16. La variación del vector velocidad por unidad de tiempo se llama aceleración.

17. En un movimiento circular, el vector desplazamiento de una partícula es una cuerda de la circunferencia.

18. En una gráfica (X-t) de un M.R.U. la recta horizontal significa que el móvil tiene rapidez constante.

C. Resuelve los siguientes problemas.

19. Se da la siguiente tabla de datos que indica, en varios instantes, los valores de la rapidez de un móvil que se desplaza por una carretera: a) construye una grafica (V. t) b) ¿en qué intervalo de tiempo no hay aceleración? c) calcula la distancia total recorrida d) construye una gráfica (X, t).

V(km/h)	0	10	20	30	40	40	40	60	80	100
t(h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18

20. Un móvil parte del reposo desde un punto A e inicia un M.U.A que mantiene durante 4 s con aceleración de 10 m/s^2 hasta llegar a un punto B. A partir de aquí se mantiene con una velocidad constante durante 8 s hasta llegar a un punto C desde donde inicia un M.U.R hasta detenerse en 4 s en un punto D. Calcular la distancia desde A hasta D. **R: 481,63 m.**

21. Un ciclista B está en reposo en el instante en que otro ciclista A pasa por el mismo punto con una rapidez constante de 12 m/s. En ese mismo instante el ciclista B arranca con una aceleración de 5 m/s^2. Calcular: a) la distancia que han recorrido cuando B alcanza a A; b) el tiempo transcurrido hasta ese momento; c) la velocidad de B cuando alcanza a A.

R: a) 57,6 m; b) 4,8 s; c) 24 m/s.

2.13 Caída libre

El movimiento con aceleración más común, es de un cuerpo que cae hacia la tierra. Si se supone nula la resistencia del aire, se observa que todos los cuerpos, cualesquiera que sea su peso, su tamaño o composición, **caen con la misma aceleración en un mismo lugar de la tierra.**

Si suponemos que se deja caer un cuerpo desde una gran altura, se tendrá que al comienzo el movimiento es uniformemente acelerado, siendo la velocidad muy pequeña y como consecuencia lo será también la resistencia del aire. A medida que la velocidad aumenta, el valor de la resistencia del aire también aumenta y la aceleración del movimiento va disminuyendo gradualmente hasta llegar un momento que la resistencia y el peso del cuerpo tienen el mismo valor, de tal manera que no hay aceleración y el cuerpo se mueve con velocidad constante (figura. 2.28).

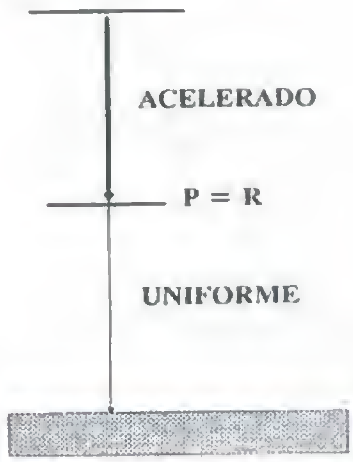


Figura 2.28

Si despreciamos los efectos de la resistencia del aire y los pequeños cambios que pueden ocurrir en la aceleración, podemos definir la caída libre de la manera siguiente:

Es el movimiento en dirección vertical con aceleración constante realizado por un cuerpo cuando se deja caer en el vacío.

El término caída libre, es aplicado tanto al movimiento de descenso como de ascenso, sólo que para ascender es necesario proporcionarle al cuerpo una velocidad inicial V_o y al descender puede que no se le proporcione esa velocidad, teniéndose que $V_o = 0$.

Como el cuerpo que cae o que asciende lo hace con aceleración constante, pueden ser aplicadas aquí las mismas ecuaciones del movimiento horizontal con sólo cambiar "a" por "g", y "X" por "Y" con las debidas convenciones de signos.

Veamos a continuación la tabla comparativa de las ecuaciones de ambos movimientos.

MOVIMIENTO

Horizontal	Caída libre
$X = V_o t + \frac{1}{2} at^2$	$Y = V_o t + \frac{1}{2} gt^2$
$V = V_o + at$	$V = V_o + gt$
$V^2 = V_o^2 + 2aX$	$V^2 = V_o^2 + 2gY$

Convenciones de signos

1. Se tomará la dirección vertical como el eje "Y", considerándose "Y" positiva la que va dirigida hacia arriba.

2. Si el cuerpo sube y el sistema de coordenadas tiene el origen en el punto de partida $t = 0$ y $y = 0$ y consideramos el sentido hacia arriba positivo, se tendrá que la velocidad y los desplazamientos son positivos, mientras que la aceleración es negativa.

3. Si para el mismo sistema de coordenadas el cuerpo baja y el origen se localiza en el punto de partida $t = 0$, $Y = 0$, se tendrá que las velocidades, los desplazamientos y la aceleración son negativas.

4. Todo valor positivo de Y indica una posición sobre el origen, y todo valor negativo indica una posición por debajo del origen.

Problemas resueltos

Problema 1

Se deja caer libremente un cuerpo. Determine la posición y la velocidad del cuerpo después de 1 s y 3 s.

Solución

Seleccionaremos el origen en el punto del lanzamiento y la dirección sobre el eje Y hacia abajo como positiva. Las posiciones en cada instante las encontraremos con signo negativo.

Para encontrar la posición del cuerpo usaremos la ecuación:

$$Y = V_o t + \frac{1}{2} gt^2$$

Como parte del reposo, por venir en caída libre, se tendrá que $V_o = 0$, por lo que nos queda que:

Para t = 1 s

$$Y = 0 + \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2).1 \text{ s}^2$$

$$\mathbf{Y = -5 \text{ m}}$$

Para t = 3 s

$$Y = 0 + \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2).9 \text{ s}^2$$

$$\mathbf{Y = -45 \text{ m}}$$

Los signos negativos de "Y" significan que son posiciones por debajo del punto considerado como origen.

Para determinar la rapidez en cada punto usaremos la ecuación.

$$V = V_o + gt$$

Como parte del reposo se tiene que $V_o = 0$ quedándonos que:

Para t = 1 s

$$V = 0 + (-10 \text{ m/s}^2).1 \text{ s}$$

$V = -10\ m/s.$

Para t = 3 s

$V = 0 + (-10\ m/s^2).3\ s$

$V = -30\ m/s$

Obsérvese que las dos velocidades son negativas. Esto significa que el cuerpo desciende a partir del origen con esa velocidad.

Problema 2

Desde el suelo se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 24,4 m/s. Calcular: a) tiempo en alcanzar la altura máxima; b) la altura máxima alcanzada; c) el tiempo transcurrido cuando esté 29 m por encima del suelo.

Solución

Seleccionaremos el punto del lanzamiento como el origen y la dirección sobre el eje Y hacia arriba como positivo.

$V = V_o + gt$

Sustituyendo V_o, V y g = 10 m/s² se tiene que:

$0 = 24,4\ m/s + (-10\ m/s^2).t$

$0 = 24,4\ m/s - 10\ m/s^2.t$

Transponiendo términos se tiene:

$10\ m/s^2.t = 24,4\ m/s,$

Despejando t nos queda que:

$$t = \frac{24,4\ m/s}{10\ m/s^2}$$

$t = 2,44\ s$

b) La altura máxima alcanzada se obtiene haciendo V = 0 en la ecuación:

$V^2 = Vo^2 + 2\,g\,Y$

$0 = Vo^2 + 2\,g\,Y_{máx}$

Sustituyendo V_o y g por sus valores obtenemos:

$$0 = (24,4\frac{m}{s})^2 + 2(-10\frac{m}{s^2}).Y_{máx}$$

$$0 = 595,36\frac{m}{s} - 20\frac{m}{s^2}.Y_{máx}$$

Transponiendo términos nos queda:

$20\ m/s^2.Y_{máx} = 595,36\ m/s$

Despejando $Y_{máx}$ nos queda:

$$y_{máx} = \frac{595,36\ m/s}{20\ m/s^2}$$

$y_{máx} = 29,768\ m$

c) Para conocer al cabo de cuánto tiempo estará el cuerpo a 29 m por encima del suelo nos bastará usar la ecuación:

$$y = V_{o}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituimos en ella los siguientes valores:

$y = +\ 29\ m \qquad g = -10\ m/s^2$

$V_o = +\ 24\ m/s$

Luego:

$$29\ m = 24,4\frac{m}{s}.t - \frac{1}{2}.10\frac{m}{s^2}.t^2$$

$$29\ m = 24,4\frac{m}{s}.t - 5\frac{m}{s^2}.t^2$$

Obsérvese que ésta es una ecuación de segundo grado que debe resolverse puesto que la variable "t" aparece al cuadrado.

Ordenando los términos de la ecuación e igualando a cero se tiene que:

$5\,t^2 - 24,4\,t + 29 = 0$

Sustituyendo los valores de los coeficientes, en la fórmula de la ecuación de segundo grado nos queda:

$$t = \frac{24,4 \pm \sqrt{595,36 - 4(5).(29)}}{10}$$

$$t = \frac{24,4 \pm \sqrt{595,36 - 580}}{10}$$

$$t = \frac{24,4 \quad 15,36}{10} = \frac{24,4 \quad 3,9}{10}$$

$$t_1 = \frac{24,4 + 3,9}{10} = 2,83\ s$$

$$t_2 = \frac{24,4 - 3,9}{10} = 2,05\ s$$

Para $t = 2,05$ s la velocidad del cuerpo será:

$V = V_0 + g.t$

$V = 24,4\ m/s + (-10\ m/s^2).2,05\ s$

$V = 24,4\ m/s - 20,5\ m/s$

$V = +\ 3,9\ m/s$

Esta velocidad positiva significa que el cuerpo se mueve hacia arriba con esa velocidad.

Para $t = 2,83$ s la velocidad del cuerpo sera:

$V = V_0 + gt$

$V\ 0\ 24,4\ m/s + (-10\ m/s^2).2,83\ s$

$V = 24,4\ m/s - 28,3\ m/s$

$\mathbf{V = -3,9\ m/s}$

Esta velocidad negativa significa que el cuerpo se mueve hacia abajo con esa velocidad, lo que da a entender que ha llegado a su altura máxima y viene descendiendo.

Nótese que en cada punto tendrá la misma rapidez al ir bajando, que la que tenía en dicho punto cuando iba subiendo.

Problema 3

Se lanza una piedra hacia arriba desde la parte alta de un edificio de 100 m de altura con una velocidad de 15 m/s y a su regreso pasa cerca del punto del lanzamiento. Calcular : a) la velocidad de la piedra 1 s y 4 s después de haber sido lanzada; b) la posición al cabo de 1 s y 4 s; c) la velocidad cuando está a 6 m por encima del punto de partida; d) la máxima altura que alcanza y el tiempo que tarda en alcanzarla.

Solución

Consideraremos el origen de coordenadas en el punto del lanzamiento y la dirección hacia arriba como positiva.

En la figura 2.30(a) dibujada, se colocan las condiciones del problema. Siendo A el origen de coordenadas.

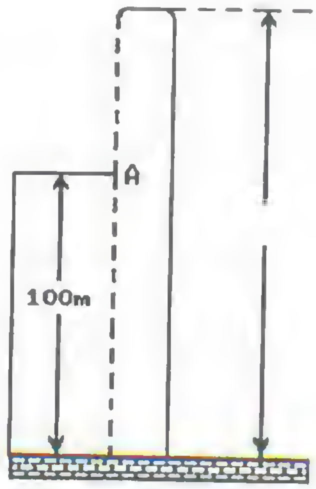


Figura 2.30(a)

a) Como el móvil tiene rapidez inicial, la rapidez de la piedra al cabo de t segundos viene dada por la ecuación:

$V = V_0 + gt$

como g es negativa, se tendrá que:

Para t = 1 s

$$V = 15\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}.1\ s$$

$$V = 15\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} = 5\frac{m}{s}$$

Esta velocidad positiva significa que al cabo de 1 s la piedra asciende con la velocidad de 5 m/s.

Para t = 4 s

$$V = 15\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}.4\ s$$

$$V = 15\frac{m}{s} - 40\frac{m}{s} = -25\frac{m}{s}$$

La velocidad negativa significa que al cabo de 4s la piedra desciende con la rapidez de 25 m/s y está por debajo del origen.

b) La posición, al cabo de cierto tiempo t, vendrá dada por:

Para t = 1 s

$$y = V_o t - \frac{1}{2} g t^2 \text{ (porque g es negativo)}$$

$$y = 15 \frac{m}{s} \cdot 1\,s - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 1\,s$$

$$y = 15\,m - 5\,m$$

$$\mathbf{y = 10\,m}$$

El signo positivo significa que la piedra está a 10 m por encima del origen (A).

Para t = 4 s

$$y = 15 \frac{m}{s} \cdot 4\,s - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 16\,s$$

$$y = 60\,m - 80\,m = -20\,m$$

$$\mathbf{y = -20\,m.}$$

El signo negativo significa que la piedra se encuentra a 20 m por debajo del origen A.

c) Cuando la piedra está a 6 m por encima del origen, la velocidad viene dada por:

$$V^2 = Vo^2 - 2\,gy \text{ (porque g es negativo)}$$

Para y = 6 m

$$V^2 = (15 \frac{m}{s})^2 - 2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 6\,m$$

$$V^2 = 225 \frac{m^2}{s^2} - 120 \frac{m^2}{s^2}$$

$$V^2 = +105 \frac{m^2}{s^2}$$

Extrayendo raíz cuadrada se tiene que:

$$\mathbf{V = \pm\ 10{,}2\ m/s}$$

El hecho de que esta velocidad tenga dos signos, significa que la piedra pasa dos veces por el mismo punto. Uno en su recorrido hacia arriba con velocidad de + 10,2 m/s y el otro en su recorrido hacia abajo con velocidad de - 10,2 m/s.

d) La altura máxima se alcanza haciendo V = 0 en la ecuación.

$$V^2 = Vo^2 + 2\,gY \qquad \text{luego}$$

$$0 = Vo^2 + 2\,g.Ymáx\,; \qquad \text{de donde,}$$

$$-2\,g\,Y_{máx} = Vo^2 \qquad \text{Luego:}$$

$$Y_{máx} = -\frac{Vo^2}{2g}$$

Sustituyendo V_o y g por sus valores, tenemos que:

$$y_{máx} = -\frac{(15 \frac{m}{s})^2}{2(-10 \frac{m}{s^2})} = \frac{225 \frac{m^2}{s^2}}{20 \frac{m}{s^2}}$$

$$Y_{máx} = 11{,}25\,m$$

Para obtener el tiempo máximo hacemos V = 0 en la ecuación

$$V = V_o + gt \qquad \text{quedándonos que:}$$

$$0 = V_o + gt_{máx}\,, \qquad \text{de donde}$$

$$t_{máx} = -\frac{V_o}{g}$$

Sustituyendo V_o y g por sus valores tenemos que:

$$t_{máx} = -\frac{15\,m/s}{(-10\,m/s^2)} = 1{,}5\,s$$

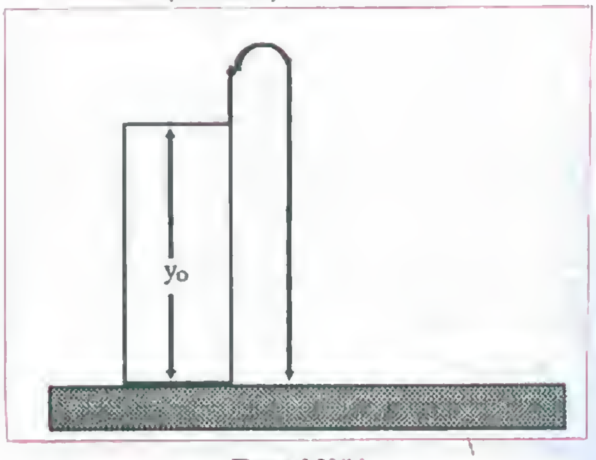


Figura 2.30(b)

Problema 4

Desde la parte alta de un edificio que tiene 80 m de altura se lanza verticalmente y hacia arriba un objeto con una velocidad de 20 m/s. Calcular: a) Altura a la que se encuentra con respecto a la calle 1 s después de haber sido lanzado. b) Altura máxima que alcanza sobre la calle. c) Tiempo que tarda en llegar a la calle d) Velocidad que tiene a los 3 s. e) Velocidad con que llega al suelo. Ver figura 2.30 (b).

Solución

Si seleccionamos al suelo como el origen del sistema de coordenadas se tendrá que:

$$y = y_o + V_o.t - \frac{1}{2} gt^2$$

a) La altura a la cual se encuentra del suelo después de 1 s es:

$$y_1 = 80 \text{ m} + 20 \text{ m/s}.1 \text{ s} - 5 \text{ m/s}^2.1 \text{ s}^2$$

$$y_1 = 95 \text{ m}$$

b) La altura máxima alcanzada con respecto a la calle es:

$$Y_m = 80 \text{ m} + \frac{Vo^2}{2g}$$

$$Y_m = 80 \text{ m} + \frac{400 \text{ m}^2/\text{s}^2}{20 \text{ m/s}^2}$$

$$Y_m = 80 \text{ m} + 20 \text{ m}$$

$$Y_m = 100 \text{ m}$$

c) El tiempo que tarda en llegar a la calle ocurre cuando Y = 0 en la expresión:

$$Y = Y_o + V_o.t - \frac{1}{2} gt^2$$

Sustituyendo nos queda:

$$0 = 80 \text{ m} + 20 \text{ m/s} . t - 5 \text{ m/s}^2.t^2$$

Si resolvemos la ecuación de segundo grado por la fórmula encontramos que t = 6,47 s

d) La velocidad que tiene a los 3 s es:

$$V_3 = V_o - gt = 20 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}^2.3 \text{ s}$$

$$V_3 = - 10 \text{ m/s}.$$

Este signo negativo de la velocidad significa que el objeto viene descendiendo

e) La velocidad al llegar al suelo es:

$$V_s = 20 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}^2.6,47 \text{ s}$$

$$V_s = - 44,7 \text{ m/s}.$$

Nótese que las dos últimas velocidades son negativas. Esto indica que ambas están dirigidas hacia abajo.

Problemas propuestos

1. Demuestre, que en un lanzamiento vertical hacia arriba, el tiempo que un cuerpo tarda en subir es igual al tiempo que tarda en bajar.

2. Demuestre, que en un lanzamiento vertical hacia arriba, la rapidez que tiene el móvil en un punto cuando iba subiendo es igual a la rapidez que tiene en el mismo punto cuando venía descendiendo.

3. a)¿Con qué velocidad debe ser lanzada verticalmente hacia arriba una pelota para alcanzar una altura máxima de 15,3 m? b) ¿Cuánto tiempo estará en el aire?. Use g = -10 m/s.

R: 17,49 m

4. Desde la altura de 120 m se deja caer un cuerpo libremente. Calcular a los 3 s: a) ¿Cuánto ha descendido?; b)¿Cuánto le falta por descender?; c) ¿Qué rapidez tiene?

R: a) 45 m; b) 75 m; c) 30 m/s.

5. Desde el suelo se lanza verticalmente y hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 50 m/s. Determinar: a)¿Cuánto tarda en alcanzar su altura máxima?; b) ¿Cuál es el valor de la altura máxima alcanzada?; c) ¿Cuál es la velocidad cuando haya ascendido 80 m?. d) ¿Cuánto ha ascendido cuando hayan trascurrido 3 s del lanzamiento?; e) ¿Al cabo de cuánto tiempo estará el cuerpo 60 m por encima del suelo?. Usar g = 10 m/s.

R: a) 5 s; b) 125 m; c) 30 m/s; d) 105 m; e) 1,2 s; 18,72 s.

6. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 73,5 m/s. a) ¿Al cabo de cuánto tiempo regresará al suelo?; b) ¿a qué altura llegará?; c) ¿cuál es la velocidad a los 10 s?.

R: a) 14,7 s; b) 270,11 m; c) - 26,5 m/s.

7. Se deja caer un cuerpo libremente desde un punto A(figura 2.31). En el punto B de su trayectoria lleva una velocidad de 39,2 m/s, pasando por un punto C situado más abajo con una velocidad de 58,8 m/s. ¿ cuál es el valor de la altura BC?. Use g = -9,8 m/s^2

R: - 98 m

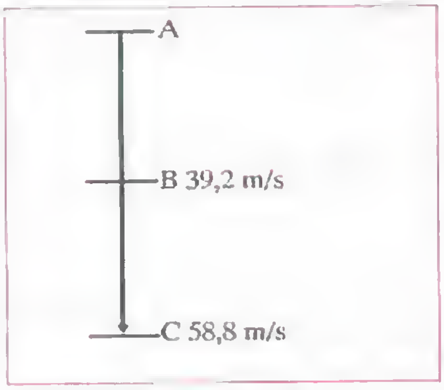


Figura 2.31

8. Una pelota es lanzada verticalmente desde la parte alta de un precipicio de 152 m de altura, con una velocidad inicial de 30,5 m/s. Calcular: a) ¿Cuál será la velocidad después de 3 s?. b) ¿cuánto tiempo invertirá la pelota en llegar al fondo del precipicio?.

R: 0,5 m/s; b) 9,35 s.

9. Desde la azotea de un edificio de 50 m de altura se lanza un cuerpo hacia arriba, con una velocidad de 24 m/s. Cuando regresa pasa rosando el edificio tal como lo indica la figura 2.32. Calcular: a) la altura máxima alcanzada. b) el tiempo que emplea para volver al punto de partida. c) su posición a los 6 s de haber sido lanzado. d) el tiempo empleado desde el momento de ser lanzado hasta llegar al suelo. e) la velocidad con que toca el suelo.

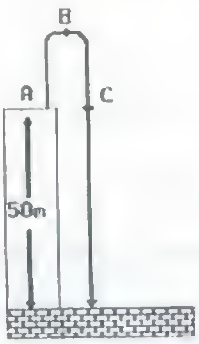


Figura 2.32

R: a) 28,8 m; b) 4,8 s; c) -36 m; d) 6,36 s; e) - 39,6 m/s.

10. Se deja caer un cuerpo A y simultáneamente y desde el mismo punto se lanza verticalmente hacia abajo otro cuerpo B con velocidad inicial de 2 m/s. Calcular en qué momento la distancia entre ellos es de 30 m. Usar g = 9,8 m/s^2.

R: 15 s.

11. Se lanza un cuerpo hacia arriba con velocidad inicial de 200 m/s y 2 s después se lanza otro con velocidad inicial de 250 m/s. ¿A qué altura del suelo el segundo alcanzará al primero?. Usar g = 9,8 m/s^2.

R: 1219 m.

12. Dos niños están en un punto situado a 18 m de altura sobre la tierra. Un niño deja caer una piedra y 1 s después el otro niño lanza hacia abajo otra piedra. ¿Qué velocidad le comunicó a la piedra el segundo niño, para que ambas tocaran simultáneamente el suelo?. Usar g = 9,8 m/s^2.

R: 15,13 m/s.

13. Dos cuerpos son lanzados hacia arriba con velocidades iniciales diferentes. El primero alcanzó cuatro veces más altura que el segundo. ¿Cuántas veces es mayor su velocidad inicial con respecto al segundo?. Demuéstrelo.

R: 2 veces.

14. Un cuerpo se deja caer y 1 s más tarde se lanza otro. a) ¿Con qué velocidad debe ser lanzado el segundo cuerpo para que alcance al primero cuando lleve una velocidad de 24 m/s.? b) Cuánto habrán descendido los dos cuerpos cuando el segundo alcance al primero?.

R: a) 13,43 m/s; b) 30 m.

15. Un punto A esta situado a 16 m por encima de otro punto B en la misma vertical. Desde A se deja caer un cuerpo que tarda 4 s en llegar a un punto C. Calcular: a) La velocidad del cuerpo en el

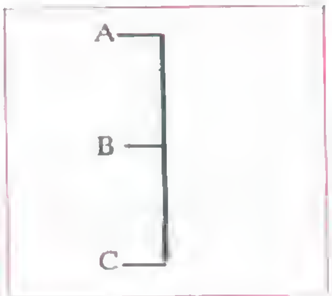


Figura 2.33

punto C; b) El tiempo que tarda en ir desde B hasta C. Usar $g = -10\ m/s^2$. Figura 2.33.

R: a) 40 m/s; b) 2,2 s.

16. Una piedra se deja caer libremente al fondo de un precipicio de 80 m de altura. Un segundo más tarde, una segunda piedra se lanza hacia abajo de tal forma que alcanza a la segunda justamente cuando ésta llega al fondo. Calcular: a) La velocidad con que se lanzó la segunda piedra; b) La velocidad que llevaba la primera cuando fue alcanzada; c) El tiempo que dura en el aire la segunda. Usar $g = -10\ m/s^2$.

R: a) 11,6 m/s; b) 40 m/s; c) 3 s.

17. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba. Cuando alcanza la mitad de la altura máxima su velocidad es de 24 m/s. a) ¿Cuál es la altura máxima?; b) qué tiempo tarda en alcanzar una velocidad de 24 m/s hacia abajo?

R: a) 57,6 m; b) 3,39 s; c) 33,9 m/s; d) 5,79 s.

18. Por una llave de la ducha cae una gota de agua cada segundo. En el primer instante en que va a caer la cuarta gota a) ¿Qué distancia separa la primera de la segunda gota?; b) ¿Qué velocidad posee la tercera gota?.

R: a) 25 m; b) 10 m/s.

19. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo. Un estudiante que se encuentra en una ventana ve que la pelota pasa frente a él con velocidad de 5,4 m/s hacia arriba. La ventana se encuentra a 12 m de altura. a) ¿Qué altura máxima alcanza la pelota?; b) ¿cuánto tarda la pelota en llegar a la altura máxima desde que la ve el estudiante frente a él?.

R: a) 13,45 m; b) 0,54 s

20. Desde la parte superior de un edificio se deja caer un cuerpo que en su movimiento vertical tarda 0,3 s en pasar por el frente de una ventana de 3 m de altura. ¿Cuál es la distancia medida entre la azotea y la parte superior de la ventana?. Usar $g = 9{,}8\ m/s^2$.

R: - 3,17 m.

21. Desde lo alto de un edificio se deja caer una piedra. A los 0,5 s después se lanza hacia abajo otra piedra con una rapidez de 10 m/s. ¿Dónde alcanzará la segunda piedra a la primera?. Usar $g = 10\ m/s^2$.

R: 2,81 m.

Preguntas

1. ¿Puede un cuerpo tener rapidez sin aceleración?. Explique.

2. ¿Puede tener aceleración un cuerpo con rapidez cero?. Explique.

3. ¿Puede un cuerpo tener rapidez constante y estar acelerándose?. Explique.

4. ¿Puede un cuerpo tener velocidad cero y estar acelerándose?. Explique.

5. Un cuerpo tiene una velocidad dirigida hacia el este. ¿Podrá tener una aceleración hacia el oeste?.

6. ¿Puede cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo cuando la aceleración es constante?.

7. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuáles verdaderas?. Explique:

a) La rapidez de un cuerpo aumenta a medida que su aceleración disminuye.

b) Cuando la velocidad es constante la velocidad promedio difiere de la velocidad instantánea.

c) Un cuerpo que tiene una velocidad hacia el este tiene una aceleración también hacia el este

d) Un cuerpo que tiene una velocidad cero tiene una aceleración diferente de cero.

e) Un objeto puede tener velocidad constante, aun cuando se rapidez varíe.

8. ¿En qué se diferencian el movimiento rectilíneo uniforme del movimiento rectilíneo uniformemente variado?.

9. ¿En todo movimiento uniformemente retardado el tiempo es máximo?. Explica tu respuesta.

10. ¿Qué condición debe verificarse para que el desplazamiento en un M.U.R. sea máximo?.

11. ¿Qué diferencia puedes establecer entre los sistemas de referencia inerciales y no inerciales?.

2.14 Movimientos en el plano con velocidad constante.

Un ejemplo de un movimiento en un plano con velocidad constante, lo tenemos en el caso de un nadador que se lanza perpendicularmente a la dirección de la corriente, tratando de atravesar el río para llegar a la orilla opuesta. Aquí no se debe perder de vista que la corriente del agua también posee su propia velocidad. ¿Cuál será la velocidad del nadador con respecto a la tierra?.

Analicemos el caso del nadador a través de la figura 2.34.

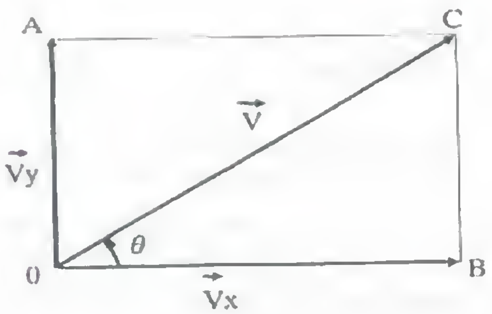


Figura 2.34

* Si nada en agua tranquila, con velocidad V_y, es lógico que después de transcurrido un tiempo t habrá alcanzado la orilla opuesta, llegando a la posición A, siguiendo la dirección dada por el vector OA.

* Si la velocidad del nadador es nula, y sólo queda sometido a la acción de la velocidad de la corriente V_x, entonces será llevado por ésta, la cual lo habrá arrastrado hasta la posición B, siguiendo la dirección y el sentido del vector OB.

* Si el nadador queda sometido a la acción simultánea de las dos velocidades, cada uno de los movimientos se cumplirá y como resultado de la suma vectorial de ellos, el nadador arribará realmente a la posición C, luego la velocidad resultante con que se desplaza respecto a la orilla vendrá dada por el vector OC que es el vector V resultante de las velocidades componentes V_x y V_y.

* La velocidad del nadador respecto a tierra (V), se obtiene a través de la suma vectorial:

$$V = Vx + Vy$$

* La magnitud de dicha velocidad viene dada por:

$$\boxed{V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}}$$

V_y : magnitud de la velocidad del nadador con respecto al agua.

V_x : magnitud de la velocidad del agua respecto a tierra.

V : magnitud de la velocidad del nadador respecto a tierra.

* La dirección se obtiene a través de la tag θ así:

$$\text{tag}\,\theta = \frac{|V_y|}{|V_x|}$$

Problema

Una lancha sale de la orilla de un río y lo intenta atravesar en dirección perpendicular a la corriente. Si la velocidad de la lancha es 16 m/s, la velocidad de la corriente es 20 m/s y el ancho del río es 60 m. Calcular: a) la velocidad de la lancha respecto a la tierra; b) la velocidad de la lancha respecto al agua; c) tiempo que tarda en atravesar el río; d) ¿qué distancia se habrá movido río abajo al atravesarlo; e) el desplazamiento total de la barca al atravesar el río; f) la dirección del desplazamiento.

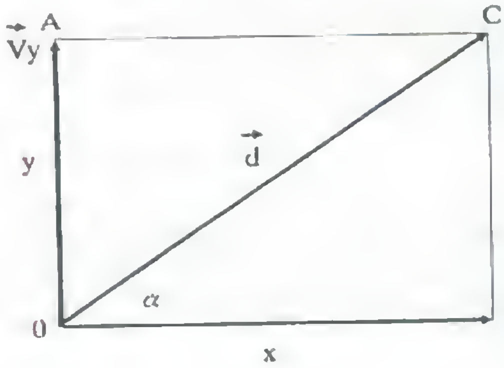


Figura 2.35

Solución

Hagamos un gráfico como el mostrado en la figura 2.35 donde las magnitudes de las velocidades son:

V_x: 20 m/s es la velocidad de la corriente.

V_y: 16 m/s es la velocidad de la lacha.

V: velocidad de la lancha respecto a tierra.

a) La magnitud de la velocidad de la lancha respecto a tierra viene dada por:

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

$$V = \sqrt{(20\frac{m}{s})^2 + (16\frac{m}{s})^2}$$

Efectuando operaciones y extrayendo raíz nos queda:

$V = 25{,}6$ m/s

b) La velocidad de la lancha respecto al agua es $V_y = 16$ m/s.

c) El tiempo que tarda en atravesar el río es el tiempo transcurrido en ir desde "0" hasta A con velocidad constante $V_y = 16$ m/s.

Despejándolo de $x = V \cdot t$, nos queda que:

$$t = \frac{x}{V_y} = \frac{60\ m}{16\ m/s} = 3{,}75\ s$$

Este tiempo es independiente de la velocidad de la corriente.

d) La distancia recorrida por la lancha río abajo se calcula a través de la relación:

$x = V_x . t$,

Sustituyendo $V_x = 20$ m/s y $t = 3{,}75$ s se tiene que:

$$x = V_x \cdot t = 20\frac{m}{s} \cdot 3{,}75\ s = 75\ m$$

e) La magnitud del desplazamiento total de la barca no es más que la composición de los dos movimientos calculados cada uno por separado y aplicando luego:

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Esto nos permite obtener OC.

$x = V_x . t$ y $y = V_y . t$

$$x = 20\frac{m}{s}\ 3{,}75\ s$$

$x = 75$ m

$$y = 16\frac{m}{s} \cdot 3{,}75\ s$$

$y = 60$ m

Luego:

$$d = \sqrt{(75\ m)^2 + (60\ m)^2}$$

$d = 96$ m

f) La dirección del desplazamiento viene dada por:

$$\text{tag}\ \alpha = \frac{|V_y|}{|V_x|} = \frac{16}{20}$$

$\text{tag}\ \alpha = 38^\circ\ 39'\ 36''$

Problemas propuestos

1. Un nadador atraviesa un río de ancho 80 m con una velocidad respecto al agua de 1,5 m/s. Si dicho nadador atraviesa el río perpendicularmente a la corriente y esa última tiene una velocidad de 1,8 m/s respecto a tierra, calcular: a) la velocidad del nadador respecto a tierra; b) el tiempo empleado en atravesar el río; c) el desplazamiento total; d) la dirección del desplazamiento.

R: a) 2,34 m/s; b) 53,3 s; c) 124,9 m; d) 39° 48' 20"

2. Un bote atraviesa un río de 50 m de ancho en dirección perpendicular a la corriente. Si la velocidad del bote respecto al agua es 4 m/s y se mueve 20 m aguas abajo. Calcular: a) la velocidad de la corriente respecto a tierra. b) la velocidad del bote respecto a tierra. c) la dirección del desplazamiento.

R: a) 1,6 m/s; b) 4,3 m/s; c) 38° 11' 55".

3. Un río corre hacia el este con una velocidad de 3 m/s. Una persona atraviesa el río en una barca con una velocidad respecto al agua de 4 m/s hacia el norte. a) ¿Cuál es su velocidad respecto a tierra?

b) si el río tiene 1 m de ancho, ¿cuánto tiempo empleará en cruzar el río?.

R: a) 5 m/s; b) 0,25 s.

4. Una lancha trata de atravesar un río perpendicularmente a la dirección de la corriente. Si la velocidad del río respecto a tierra es 4 m/s y la dirección del desplazamiento al atravesar el río es 32° 20' 57", a)¿cuál es la velocidad de la lancha respecto al agua?; b) si el río tiene un ancho de 120 m, ¿cuál es el desplazamiento horizontal de la lancha en ese tiempo?; d) ¿cuál es el desplazamiento total?.

R: a) 2,53 m/s b) 47,4 s; c) 189,6 m; d) 224,38 m.

2.15 Movimiento de proyectiles

Introducción

En el aspecto que se acaba de tratar se ha hecho un análisis del movimiento en el plano con velocidad constante. Aquí daremos inicio al estudio del movimiento con **aceleración constante** y trataremos el movimiento de los proyectiles en dos casos. Uno de ellos es el movimiento horizontal en el vacío y el otro el lanzamiento inclinado.

Un proyectil no es más que un objeto al cual se le ha comunicado una velocidad inicial y se ha dejado en libertad para que realice un movimiento bajo la acción de la gravedad.

La ciencia encargada de hacer el estudio del movimiento de los proyectiles se llama **balística**.

Para tener una idea de este tipo de lanzamiento, trataremos de ver algunos ejemplos que lo pongan de manifiesto. Veamos:

- Cuando un jugador de béisbol le lanza una pelota a otro jugador
- Cuando un bateador hace "swing" a un lanzamiento y eleva la pelota.
- Cuando un futbolista le da un puntapié al balón.
- Cuando un avión deja caer una bomba.

Todos estos movimientos serán analizados en este texto, de manera sencilla, sin considerar algunos factores que inciden en ellos, tales como la resistencia del aire, la rotación de la tierra.

Consideremos una metra colocada en el centro de una mesa (figura 2.36). Si la hacemos rodar proporcionándole un golpecito con el dedo, ella se desplazará a lo largo de la mesa con movimiento rectilíneo uniforme (siempre y cuando no se considere el roce).

Este movimiento debería continuar en forma rectilínea, ocupando las posiciones A, B y C, pero no ocurre así, sino que ocupa las posiciones H, I, J debido a los **efectos de atracción de la tierra**.

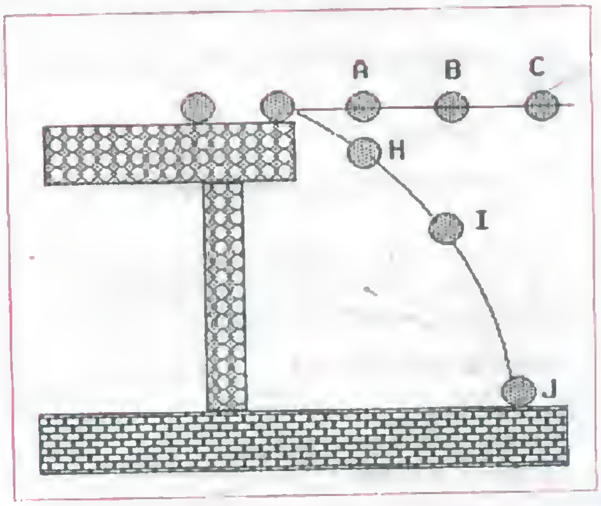


Figura 2.36

Como puede notarse, la metra está sometida simultáneamente a la acción de dos movimientos:

a) Uno horizontal con velocidad constante, donde $a_x = 0$.

b) Otro vertical, el cual es uniformemente acelerado, donde $a_y = -g$.

Estos dos movimientos hacen que el movimiento resultante sea de trayectoria parabólica. Dichos movimientos son completamente independientes uno del otro, tal y como lo demuestra Galileo mediante experimentos, que lo llevaron a enunciar su principio llamado **Principio de la Independencia de los Movimientos**, el cual enuncia así:

"Si un cuerpo tiene un movimiento compuesto, cada uno de los movimientos componentes se cumple como si los demás no existieran".

Movimiento de un cuerpo lanzado horizontalmente.

En este caso, el disparo se hace desde una altura que llamaremos Y, como lo indica la figura 2.37, con una velocidad inicial que llamaremos V_o. Usaremos como referencia un sistema cartesiano cuyo origen está en el punto de lanzamiento (A) y cuyo eje X es la dirección del lanzamiento. El eje Y es la vertical con sentido negativo hacia abajo. Al iniciar su caida estará sometido a la acción de dos movimientos independientes:

Uno horizontal con velocidad constante

Otro vertical uniformemente acelerado hacia abajo, tal como un objeto que cae libremente partiendo del reposo.

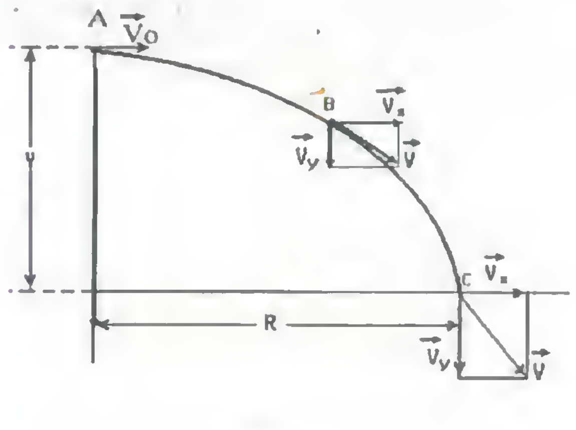


Figura 2.37

Las flechas horizontales que indican la velocidad horizontal son todas de la misma longitud, lo que nos indica que **la velocidad horizontal es constante**, en cambio las flechas verticales son cada vez de mayor longitud, indicándonos que la **velocidad vertical aumenta.**

La velocidad resultante V del proyectil es tangente en cada punto de la curva ABC (figura. 2.37) y está cambiando constantemente de módulo y dirección.

Ecuaciones de la velocidad.

-La componente horizontal de la velocidad y que llamaremos V_x, será de magnitud constante a través de todo el recorrido e igual a V_o. Esto se debe a que el movimiento en esta dirección es con **velocidad constante.**

$$V_o = V_x$$

-La componente vertical de la velocidad V_y en un instante de tiempo cualesquiera, viene dada en módulo por:

$$V_y = g \cdot t$$

-La magnitud de la velocidad resultante V, viene dada en módulo por la expresión:

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

-La dirección de la velocidad queda determinada por la tangente del ángulo . (Figura 2.37).

$$\text{Tang}\,\alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

Ecuaciones del desplazamiento

Como se puede notar, el movimiento tiene simultáneamente un desplazamiento horizontal (x) y un desplazamiento vertical (y) en un instante de tiempo cualesquiera. Observemos la figura 2.38.

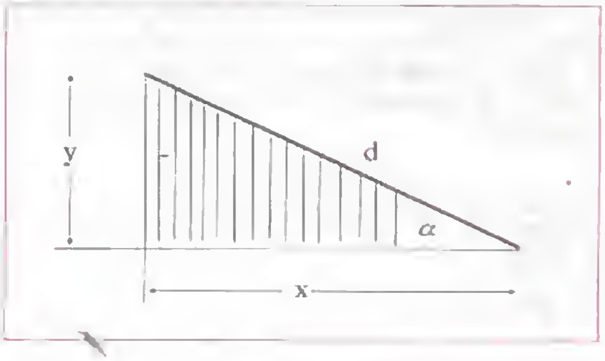


Figura 2.38

y : desplazamiento vertical

x : desplazamiento horizontal

d : desplazamiento total

α : dirección del desplazamiento

- La ecuación del desplazamiento horizontal (x) en módulo, es la misma del movimiento rectilíneo uniforme, puesto que la rapidez en ese sentido es constante, escribiéndose que:

$$\boxed{x = V_o \cdot t}$$

-**La ecuación del desplazamiento vertical (y)**, en módulo, se calcula como si el cuerpo se moviese en caída libre, escribiéndose que:

$$y = -\frac{1}{2}\, g.t^2$$

El signo negativo se debe a la gravedad, que como se ha dicho es un vector dirigido hacia abajo.

- **El desplazamiento total (d)** en módulo viene dado por:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **La dirección del desplazamiento** se obtiene aplicando la definición de tangente en el triángulo rayado de la figura 2.38.

$$\mathrm{tag}\,\alpha = \frac{y}{x}$$

- **El tiempo de vuelo(t_v)** es el tiempo transcurrido desde el momento del lanzamiento hasta tocar el suelo. Al tocar el suelo es porque ha recorrido todo el desplazamiento vertical (y), pudiéndose escribir que:

$$y = -\frac{1}{2}\, g\, t_v^2 \text{ de donde,}$$

$$t_v^2 = -\frac{2y}{g}$$

$$t_v = \sqrt{-\frac{2y}{g}}$$

La cantidad subradical será siempre positiva, puesto que (y) es negativa de acuerdo a la elección hecha al comienzo, donde se dijo que el eje "y" es negativo hacia abajo.

- **El alcance horizontal (R)** es el desplazamiento horizontal en el tiempo de vuelo y aparece indicado en la figura 2.37.

La ecuación para calcular el alcance horizontal (R) es la misma del desplazamiento horizontal, pero con $t = t_v$.

$$R = V_x \cdot t_v$$

Ecuación de la trayectoria

Nuestra idea consiste en demostrar que la trayectoria del proyectil es parabólica. En efecto, el desplazamiento horizontal para un cierto tiempo t viene dado por:

$x = V_o.t$, de donde

$$t = \frac{x}{V_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Por otra parte, el desplazamiento vertical al mismo tiempo t es:

$$y = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

Como el tiempo para ambos desplazamientos es el mismo, podemos sustituir t de la ecuación (1), en t de la ecuación (2), quedándonos:

$$y = \frac{1}{2}\, g.\left(\frac{x}{V_o}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{gx^2}{Vo^2}$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{Vo^2}\right).x^2$$

Como V_o y g son constantes se tendrá que:

$$y = \frac{1}{2}\;\frac{g}{Vo^2}$$

es una constante, por lo que podemos sustituir lo que está entre paréntesis por k, adoptando la expresión la forma siguiente

$$Y = k.x^2$$

Como puede notarse, esta expresión corresponde a la ecuación de una parábola.

Problemas resueltos

Problema 1

Una esfera es lanzada horizontalmente desde el borde de una mesa con una velocidad de 24,40 m/s, llegando al suelo 2,5 s después. a) ¿Cuánto ha descendido en ese tiempo?; b) ¿cuánto ha avanzado en sentido horizontal?; c) ¿cuánto valen las componentes horizontal y vertical de la velocidad

en el momento de tocar el suelo?; d) ¿cuál la dirección de la velocidad en el instante anterior?; e) ¿cuál es el valor de la velocidad resultante en ese momento?.

Solución

Según los datos del problema, se dibuja un diagrama (figura. 2.39) indicándose las condiciones del problema.

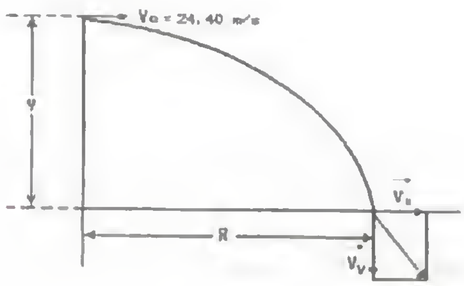


Figura 2.39(a)

Nótese que nos dan $t_v = 2,5$ s y velocidad inicial $V_0 = 24,40$ m/s.

a) Como nos piden el descenso vertical en el tiempo de vuelo, calculamos "y" mediante la ecuación:

$$y = \frac{1}{2}\ g t v^2$$

Sustituyendo por $g = -10\ m/s^2$ y $t_v = 2,5$ s, tenemos que:

$$y = \frac{1}{2}\ (-10\ m/s^2).(2,5\ s)^2$$

$$y = -5\ m/s.6,25\ s$$

$$\mathbf{y = -31,25\ m}$$

El signo negativo significa que hubo un descenso. Debido a que el descenso ha sido en el tiempo de vuelo, concluimos que se ha calculado la altura desde donde fue lanzada la esfera.

b) Este avance horizontal no es más que el alcance horizontal, ya que nos están dando el tiempo de vuelo.

$$R = V_x.t_v$$

$$R = 24,40\frac{m}{s}.\ 2,5\ s$$

$$\mathbf{R = 61\ m}$$

c) Las componentes (V_x) (V_y) de la velocidad, vienen dadas así:

- Componente horizontal

Recordemos que el movimiento horizontal es a velocidad constante, por lo que podemos decir:

$$V_x = V_0 = 24,40\ m/s.$$

- Componente vertical

$$V_y = gt$$

$$V_y = -10\ m/s^2.2,5\ s$$

$$\mathbf{V_y = -25\ m/s}$$

Aquí, el signo negativo significa que la componente vertical de la velocidad está dirigida hacia abajo.

d) Calculemos la dirección de la velocidad y observemos la figura 2.39(b), de la cual se obtiene que:

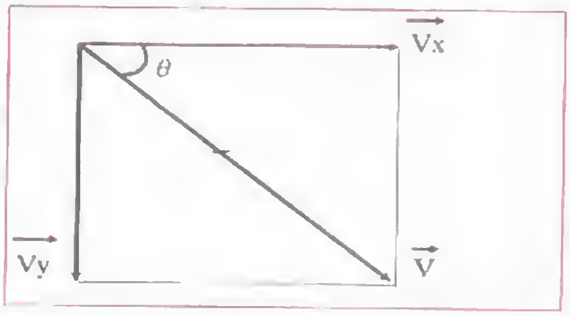


Figura 2.39(b)

$$\text{tag}\ \theta = \frac{V_y}{V_x}$$

$$\text{tag}\ \theta = \frac{25\ m/s}{24,40\ m/s}$$

$$= 1,02\ \text{, de donde:}$$

$$\theta = 45^{o}\ 41'\ 45''$$

e) El módulo de la velocidad viene dado por:

$$V^2 = Vx^2 + Vy^2$$

$$V^2 = (24,40\ m/s)^2 + (25\ m/s)^2$$

Efectuando operaciones y extrayendo raíz cuadrada nos queda:

$$V = 34,93\ m/s.$$

Lanzamiento inclinado

En este análisis también se ignora el efecto que produce la resistencia del aire sobre estos movimientos.

Consideremos un proyectil lanzado desde la superficie terrestre con una velocidad inicial y formando un ángulo con la horizontal. Si la tierra no ejerciera atracción, él ocuparía las posiciones A,B,C; pero no ocurre así, puesto que el proyectil por efecto de la gravedad, ocupa las posiciones A', B', C' describiendo una trayectoria parabólica. En este caso el proyectil se puede considerar como el movimiento resultante de estos dos:

a) **Uno horizontal con velocidad constante**, es decir, la componente horizontal de la aceleración es cero $a_x = 0$

b) **Otro vertical con aceleración constante g**, dirigida hacia abajo, $a_y = -g$.

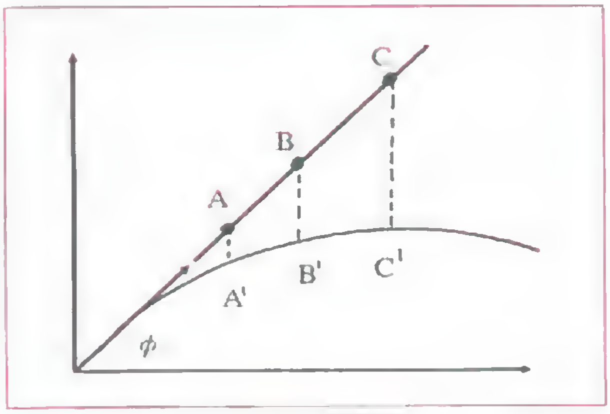


Figura 2.40

- **Ecuaciones de la velocidad en el momento del lanzamiento (para $t = 0$).**

Tomemos como referencia un sistema cartesiano cuyo origen es el punto de lanzamiento, donde el eje x es el horizontal y cuyo eje y es el vertical.

Supóngase que se dispara un proyectil, con una velocidad inicial que llamaremos V_O, formando con la horizontal un ángulo que llamaremos θ (Ver figura 2.41).

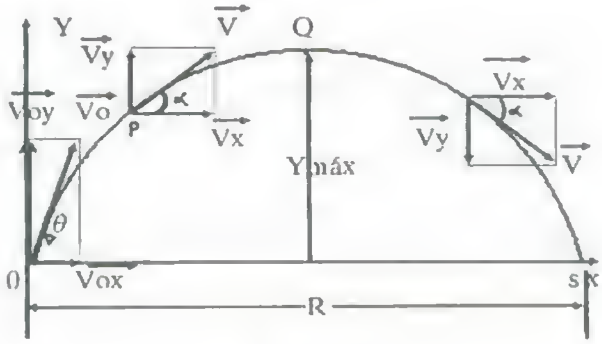


Figura 2.41

Las componentes del vector velocidad inicial V_O, en las direcciones de los ejes vienen dadas en módulo así:

-Componente horizontal de la velocidad inicial

$V_{ox} = V_O \cos \theta$

-Componente vertical de la velocidad inicial

$V_{oy} = V_O \operatorname{sen} \theta$

Ecuaciones de la velocidad para un instante después del lanzamiento

Cuando el proyectil ocupa la posición P de la figura 2.41 un instante t después de haber sido lanzado, la velocidad V, tendrá una **componente horizontal** que llamaremos V_x y una **componente Vertical** que llamaremos V_y.

- La magnitud de la componente horizontal de la velocidad en un instante cualesquiera se mantiene constante a través de todo el recorrido y vendrá dada por:

$$V_x = V_{ox} = V_O.\cos \theta$$

- La magnitud de la componente vertical de la velocidad en cualquier instante viene dada por:

$$V_y = V_{oy} + g.t$$

- La magnitud de la velocidad en cualquier instante viene dada como:

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

- La dirección de la velocidad es el ángulo que dicho vector forma con el eje horizontal. En éste caso es α y viene dado por:

$$\tan \alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

- **Ecuaciones del desplazamiento**

El movimiento horizontal lo realiza el proyectil con velocidad constante, por lo que el **desplazamiento horizontal** x viene dado por la ecuación:

$$x = V_x . t$$

$$x = V_o \cos\theta \, . \, t$$

El movimiento vertical lo realiza con aceleración constante g, dirigida hacia abajo, por lo que la ecuación del **desplazamiento vertical** vendrá dada por:

$$y = V_{oy}t + \frac{1}{2} gt^2$$

Como $V_{oy} = V_o \operatorname{sen}\theta$, puede escribirse que:

$$y = V_o \operatorname{sen}\theta \, . t + \frac{1}{2} gt^2$$

- **Ecuación del tiempo máximo ($t_{máx}$)**

Se llama **tiempo máximo** al tiempo empleado por el proyectil en alcanzar la altura máxima ($y_{máx}$) lo cual logra al llegar a la posición Q de la figura 2.42

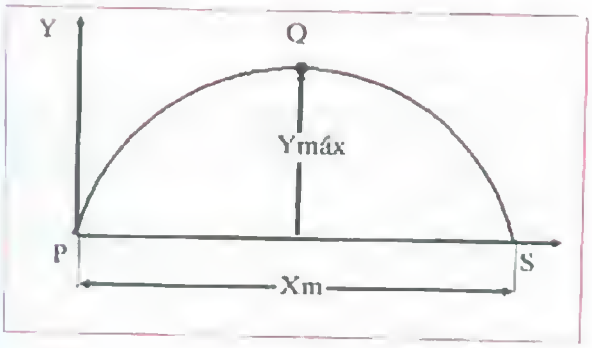


Figura 2.42

Como puede notarse, a medida que el proyectil asciende va disminuyendo la componente vertical de la velocidad hasta llegar un momento en que la misma se hace cero.

Para ello hacemos $V_y = 0$ en la ecuación

$$V_y = V_{oy} + gt$$

$$0 = V_{oy} + gt_{máx}$$

Despejando $t_{máx}$ se tiene que:

$$t_{máx} = -\frac{V_{oy}}{g}$$

Recuerde que g siempre es negativa, por lo que $t_{máx}$ ha de ser positiva.

- **Ecuación de la altura máxima ($y_{máx}$)**

Si hacemos $t = t_{máx}$ en la ecuación siguiente, obtenemos la altura máxima

$$y = V_{oy} \, . \, t + \frac{1}{2} gt^2, \quad \text{quedándonos que:}$$

$$y_{máx} = V_{oy} . t_{máx} + \frac{1}{2} gt^2_{máx}$$

Como $t_{máx} = -\dfrac{V_{oy}}{g}$, nos queda:

$$y_{máx} = V_{oy} \left(-\frac{V_{oy}}{g}\right) + \frac{1}{2} g . \left(\frac{V_{oy}}{g}\right)^2$$

$$y_{máx} = -\frac{Voy^2}{g} + \frac{1}{2} g . \frac{Voy^2}{g^2}$$

$$= -\frac{Voy^2}{g} + \frac{Voy^2}{2g}$$

$$= \frac{-2Voy^2 + Voy^2}{2g}$$

$$y_{máx} = -\frac{Voy^2}{2g}$$

- **Ecuación del tiempo de vuelo.**

El tiempo de vuelo es el tiempo transcurrido en ir desde P hasta S pasando por Q (figura. 2.42). El tiempo de vuelo (t_v) es igual al doble del tiempo máximo.

$$t_v = 2 \cdot t_{máx}$$

-El alcance horizontal es el desplazamiento horizontal en el tiempo de vuelo que notaremos en R.

$$R = V_{ox} \cdot t_v$$

donde R es el alcance horizontal.

Problemas resueltos

Problema 1

Se lanza un proyectil con una velocidad de 61 m/s y un ángulo de 60° sobre la horizontal. Calcular: a) ¿cuánto vale la componente vertical de la velocidad inicial?; ¿cuánto vale la componente horizontal de la velocidad inicial?; c) cuál es la velocidad vertical al cabo de 2 s?; d) ¿cuánto vale la velocidad horizontal al cabo de 2 s?; e) ¿cuál es la magnitud de la velocidad al cabo de 2 s?; f) ¿en qué instante el proyectil alcanza el punto más alto de su trayectoria?; g) cuál es el alcance del proyectil?; h) cuál es la velocidad del proyectil al llegar al suelo?.

Solución

Para resolverlo debemos hacer un dibujo de un movimiento parabólico, que nos permita tener idea del problema, (figura. 2.43).

a) La componente vertical de la velocidad inicial es:

$$V_{oy} = V_o \operatorname{sen} \theta$$

$$V_{oy} = 61 \text{ m/s} . \operatorname{sen} 60^o$$

$$V_{oy} = 52{,}82 \text{ m/s}.$$

b) La componente horizontal de la velocidad inicial viene dada por:

$$V_{ox} = V_o . \cos 60^o$$

$$V_{ox} = 61 \frac{m}{s} . 0{,}5$$

$$V_{ox} = 30{,}5 \frac{m}{s}$$

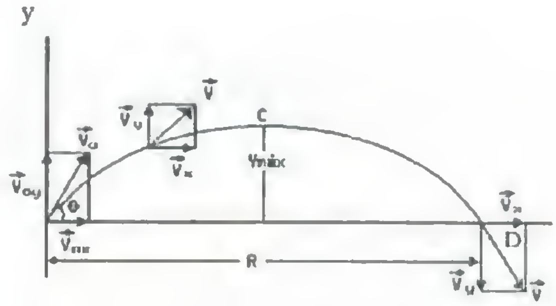


Figura 2.43

c) La velocidad al cabo de 2 s es cuando el móvil está en B (figura. 2.43), la cual viene dada por:

$$V_y = V_{oy} + gt$$

Sustituyamos los valores:

$$V_{oy} = 52{,}82 \text{ m/s}$$

$$g = -10 \text{ m/s}^2$$

$$t = 2 \text{ s},$$

$$V_y = 52{,}82 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}^2 . 2 \text{ s}$$

$$V_y = 552{,}82 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}$$

$$V_y = 32{,}82 \text{ m/s}$$

d) La velocidad horizontal V_x, al cabo de 2 s es la misma que $V_{ox} = 30{,}5$ m/s, porque la velocidad en este sentido permanece constante a través de todo el recorrido.

e) La magnitud de la velocidad al cabo de 2 s es:

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

$$V = \sqrt{(30{,}5 \text{ m/s})^2 + (32{,}82 \text{ m/s})^2}$$

Efectuando operaciones y extrayendo raíz cuadrada nos queda:

$$V = 44{,}8 \text{ m/s}$$

f) El instante en que el proyectil alcanza el punto más alto de su trayectoria no es más que el tiempo máximo, el cual se calcula por la ecuación:

$$t_{máx} = -\frac{V_{oy}}{g}$$

Sustituyendo, se tiene que:

$$t_{máx} = -\frac{V_{oy}}{g} = \frac{52,82\ m/s}{(-10\ m/s^2)}$$

$t_{máx} = 5,282$ s.

g) El alcance horizontal del proyectil lo encontramos por:

$R = V_{ox}.t_v$, siendo t_v el tiempo de vuelo

$R = 30,5$ m/s.2 $t_{máx}$

$R = 30,5$ m/s.10,564 s

$R = 322,202$ m.

h) La velocidad del proyectil al llegar al suelo, punto D de la figura 2.43, la calculamos por:

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2} \quad \text{......................................(I)}$$

Calculemos por separado cada una de estas velocidades:

La componente V_x al llegar al suelo es la misma V_{ox}

$V_x = V_{ox}$

$V_x = 30,5$ m/s ....(II)

La componente V_y en el tiempo de vuelo es

$V_y = V_{oy} + gt_v$

$t_v = 2\ t_{máx}$

$V_y = 52,82\ m/s + (-10\ m/s^2).2.5,282$ s

$V_y = 52,82$ m/s - 105,64 m/s

$V_y = -52,82$ m/s ....(III)

El signo negativo significa que V_y está dirigida hacia abajo. Sustituyendo (II) y (III) en (I) tenemos:

$$V = \sqrt{(30,5\ m/s)^2 + (-52,82\ m/s)^2}$$

Efectuando las operaciones y extrayendo raíz cuadrada se tiene:

V = 60,99 m/s.

Existe un error de 0,01 m/s debido a las aproximaciones decimales.

Problema 2

Se dispara desde el suelo un proyectil formando con la horizontal un ángulo de 42° y cae al suelo más adelante en 6 s. Calcular: a) la velocidad del lanzamiento; b) el alcance horizontal; c) la altura máxima alcanzada.

Solución:

a) Como puede notarse, nos dan el ángulo de lanzamiento $\alpha = 42°$ y el tiempo de vuelo (t_v).

La ecuación del t_v viene dada por:

$t_v = 2.t_{máx}$ ....(I)

La ecuación del tiempo máximo es

$$t_{máx} = -\frac{V_{oy}}{g} \quad \text{..(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) nos queda:

$$t_v = 2.(-\frac{V_{oy}}{g})$$

$$t_v = -\frac{2V_o \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Despejando V_o tenemos que:

$$V_o = -\frac{g\ t_v}{2 \operatorname{sen}\theta}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$V_o = -\frac{(-10\ m/s^2).6\ s}{2 \operatorname{sen} 42°}$$

$$V_o = -\frac{-60\ m/s}{1,34} = 44,78\ m/s$$

b) El alcance horizontal (R) viene dado por:

$R = V_{ox} . t_v$

Pero $V_{ox} = V_o \cos\theta$

$V_{ox} = 44,78$ m/s . cos 42°

$= 33,278$ m/s.

Luego:

$R = 33{,}278 \text{ m/s} . 6 \text{ s} = 199{,}66 \text{ m}$

c) La altura máxima viene dada por:

$$y_{máx} = -\frac{V_{oy}^2}{2g}$$

Pero $V_{oy} = V_o . \text{sen}\, \theta$

$= 44{,}78 \text{ m/s} . \text{sen } 42^o$

$V_{oy} = 29{,}96 \text{ m/s}$

Luego:

$$y_{máx} = -\frac{(29{,}96 \frac{m}{s})^2}{2(-10 \frac{m}{s^2})}$$

$y_{máx} = 44{,}88 \text{ m}$

Preguntas

1. El piloto de un avión desea dejar caer una bomba sobre determinado objetivo. ¿Dónde debe dejarla caer: antes del objetivo o después del objetivo?. Explica tu respuesta.

2. En un lanzamiento de proyectiles, formando un ángulo con la horizontal. ¿En qué punto de la trayectoria la velocidad es mínima?; ¿Dónde es máxima?. Explica.

3. ¿Por qué la componente horizontal de la velocidad, en un lanzamiento inclinado, es constante?.

4. ¿Es lo mismo V_y que V_{oy}?. Explica.

5. ¿Por qué se dice que el lanzamiento inclinado es un movimiento compuesto?.

6. ¿Es lo mismo el tiempo de vuelo que el tiempo máximo?. Explica.

7. ¿Por qué los proyectiles adquieren movimientos parabólicos?.

8. Partiendo de la ecuación $R = V_x . t_v$, demuestre que el alcance horizontal viene dado por:

$$R = \frac{V_o^2 . \text{sen}\,(2\theta)}{g}$$

9. Basándose en la ecuación anterior, y despejando sen 2θ, analiza lo siguiente:

a) ¿cuánto vale θ si $V_o = 20$ m/s y $R = 40$ m?

b) ¿qué valor adquirirá R si $\theta = 50^o$ y $V_o = 20$ m/s?

c) ¿qué valor adquiere R si $\theta = 30^o$ y $V_o = 20$ m/s?

d) ¿qué puedes concluir de lo que has observado en los casos a, b y c?.

10. ¿Qué factores afectaría la resistencia del aire en el lanzamiento de proyectiles?.

11. Complete el siguiente cuadro:

Vo(m/s)	θ	$y_{máx}$(m)	R (m)	tv
400	30°			
400	45°			
400	60°			
400	90°			

¿Qué observas en los resultados obtenidos?.

Problemas propuestos

1. Una piedra es lanzada horizontalmente desde la parte alta de un edificio a una velocidad de 15,2 m/s. Hallar la velocidad y la posición al cabo de 3 s. Use $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

R: 33,09 m/s - 62° 39' 38,6"

44,1 m - 45,6 m

2. Desde un avión que vuela horizontalmente con una velocidad de 483 Km/h se desea lanzar una bomba. Si el avión se encuentra a 3048 m sobre el

suelo, ¿a qué distancia del blanco debe ser lanzada la bomba?. Usar $g = 10\ m/s^2$.

R: 3312,41 m

3. Una pelota de béisbol se separa del bate con un ángulo de 37° sobre la horizontal y con una velocidad de 36,6 m/s. La pelota es recogida por espectador en las gradas a una distancia horizontal de 117 m. ¿A qué altura sobre el plano en que fue bateada se encuentra el espectador?.

R: 8,10 m.

4. Hallar el alcance horizontal de un proyectil disparado por un cañón con una velocidad inicial de 732 m/s y un ángulo de 40° sobre la horizontal. Usar $g = 10\ m/s^2$.

R: 52,76 Km.

5. Un futbolista patea un balón con un ángulo de 37° de la horizontal con una rapidez de 15,25 m/s. a) ¿Cuándo alcanza el balón el punto más alto de la trayectoria?; b) ¿a qué altura llega el balón?; c) ¿cuál es el alcance horizontal?. Usar $g = 10\ m/s^2$.

R: a) 0,92 s; b) 4,21 m; c) 22,4 m.

6. Un proyectil es disparado horizontalmente desde un cañón situado a 44 m por encima de un plano horizontal y con una velocidad inicial de 240 m/s. Usar $g = 10\ m/s^2$. Determinar: a) ¿cuánto tiempo permanece el proyectil en el aire?; b) ¿a qué distancia horizontal choca con el suelo; c) ¿cuál es la magnitud de la componente vertical de la velocidad al llegar al suelo?.

R: a) 2,96 s; b) 710,4 m; c) 29,6 m/s.

7. Un proyectil es disparado con un ángulo de elevación de 45° y alcanza el punto más alto de su trayectoria al cabo de 27 s. Calcular: a) la velocidad inicial; b) la altura máxima alcanzada; c) la distancia desde el cañón al blanco, sabiendo que ambos están al mismo nivel. Usar $g = 9,8\ m/s^2$.

R: a) 374,2 m/s; b) 3572 m; c) 14.288,4 m.

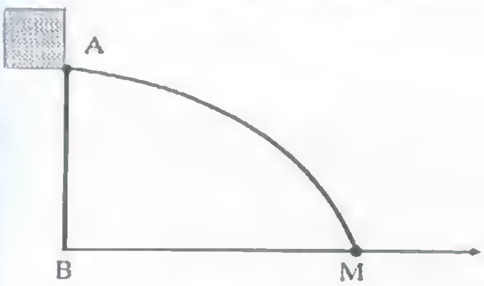


Figura 2.44

8. En la figura 2.44 se muestra un chorro de agua que sale horizontalmente por un orificio A de un tanque que está situado a 3 m de altura (MB = 4 m). Calcular la velocidad de salida del chorro en A.

R; 5,19 m/s.

9. Una pelota de fútbol es pateada con una velocidad inicial de 15 m/s, con un ángulo de 45° desde una portería en dirección a la otra. ¿Alcanzará a caer en ésta última?. El largo de la pista es de 100 m.

R: no cae.

10. Se lanza un proyectil con una velocidad de 400 m/s y un ángulo de elevación de 30°: Calcula el alcance del proyectil. Usar $g = -9,8\ m/s^2$.

R: 14139,19 m.

11. Una pelota de béisbol es golpeada con un bate formando un ángulo de 30° por encima de la horizontal y es recibida por un jugador fuera del cuadro a 120 m del home. Determina: a) ¿cuál era la velocidad inicial de la pelota?; ¿a qué altura se elevó?; c) ¿cuánto tiempo estuvo en el aire?. Use $g = 9,8\ m/s^2$.

R: a) 36,8 m/s; b) 17,32 m; c) 3,75 s.

12. Desde un avión, que vuela a 1.200 m de altura y con una velocidad de 500 Km/h deja caer un paquete. Calcular: a) ¿cuánto tarda el paquete en llegar al suelo; b) ¿qué velocidad tiene al cabo de 10 s?; c) ¿cuál es el alcance horizontal?. Use $g = 9,8\ m/s^2$.

R: a) 15,65 s; b) 169,9 m/s; c) 2173,47 m.

13. En el borde de un escritorio, situado a 1 m de la pizarra, se coloca una tiza. Esta es lanzada con un impulso horizontal y en dirección perpendicular a la pizarra, marcando la huella de su golpe a 20 cm por debajo de la superficie de la mesa. ¿Con qué velocidad se lanzó la tiza?. Usar $g = 9,8\ m/s^2$.

R: 5 m/s.

14. Una pelota ha sido lanzada formando un ángulo de 36° con la horizontal a una velocidad de 10 m/s. Calcular: a) las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial; b) la altura del mayor ascenso; c) el tiempo y el alcance del vuelo; d) la magnitud de la velocidad a los 0,8 s.

R: a) 8,09 m/s y 5,87 m/s; b) 1,758 m;

c) 1,198 s y 9,44 m; d) 10,10 m/s.

15. Desde el suelo se dispara un proyectil formando un ángulo de 32° respecto a la horizontal, cayendo al suelo más adelante y al mismo nivel del la lanzamiento en 4 s.Calcular: a) la velocidad del lanzamiento; b) la magnitud de la velocidad al cabo de 1,2 s; c) el alcance horizontal.

R: a) 36,9 m/s; b) 32,3 m/s; c) 125,36 m.

16. Un avión que vuela horizontalmente con una velocidad de 360 Km/h deja caer una bomba, la cual al transcurrir un tiempo determinado está descendiendo a 120 m/s. Calcular en este instante: a) la magnitud de la componente vertical de la velocidad; b) el tiempo transcurrido; c) ¿cuánto ha descendido?; d) ¿cuánto ha recorrido horizontalmente? Si la bomba tarda 10 s. en dar en el blanco calcular también la altura a la cual vuela y el alcance horizontal. Usar $g = 9,8\ m/s^2$.

R: a) 66,33 m/s - 6,76 s. b) 223,92 m.- 676 m.

c) 490 m. d) 1000 m.

17. Se lanza un proyectil formando un cierto ángulo α con la horizontal y con una velocidad inicial de 60 m/s. Si la magnitud de la componente vertical de la velocidad inicial es 40 m/s, calcular: a) el valor del ángulo α; b) la velocidad del proyectil a los 3 s.; c) la altura máxima alcanzada; d) el alcance horizontal. Use $g = 9,8\ m/s^2$.

: a) 41º 48' 44" ; b) 59,9 m/s;

c) 81,63 m; d) 365,06 m.

18. Una persona lanza una piedra hacia arriba formando un cierto ángulo α con la horizontal. La piedra cae a su nivel original 2,2 s. después y a los 26 m del lugar del lanzamiento. Determinar: a) ¿ en qué tiempo alcanzó la altura máxima?; b) ¿ cuál fue la velocidad del lanzamiento?, c) ¿cuál es la dirección de la velocidad al cabo de 1 segundo del lanzamiento?

R: a) 1,1 s; b) 15,99 m/s; c) 4º 41' 43"

19. ¿ Con qué velocidad inicial debe ser lanzado un proyectil que forma con la horizontal un ángulo de 32º, para que sea capaz de batir un blanco situado a 26 m. del punto del lanzamiento y elevado a 4 m. por encima de éste?.

R: 19,39 m/s.

Autoevaluación 3

Caída libre - Movimientos en el plano.

Primera parte. Selección

A: Selecciona la alternativa correcta y escríbela en tu cuaderno.

1. Un cuerpo que se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 4,9 m/s, dura en el aire:
a) 2 s
b) 0,5 s
c) 1 s
d) 0,25 s.

2. La gráfica (V-t) de un lanzamiento vertical hacia arriba es una recta:
a) horizontal
b) creciente
c) decreciente
d) sobre el eje de abscisas.

3. En el lanzamiento parabólico el movimiento horizontal es:
a) con aceleración constante
b) uniformemente retardado
c) uniformemente acelerado
d) uniforme.

4. Un proyectil se dispara horizontalmente desde una altura de 80 m. El tiempo que dura el proyectil en el aire es:
a) 80 s
b) 8 s
c) 4 s
d) 2 s. ($g = 10\ m/s^2$).

5. Cuando se lanza un proyectil con un ángulo de elevación con respecto a la horizontal, la magnitud de la velocidad en el punto más alto es:
a) máxima.
b) nula.
c) igual a la V_0.
d) del mismo valor de la componente horizontal de la V_0.

6. Un proyectil lanzado hacia arriba formando un ángulo con la horizontal está dotado de dos movimientos, uno de ellos es:
a) horizontal con velocidad variable.
b) horizontal con aceleración constante.
c) vertical con aceleración variable.
d) vertical con aceleración constante.

7. En un lanzamiento horizontal, el tiempo de vuelo depende de:
a) la velocidad inicial.
b) la altura desde donde se lanza.
c) ambas.
d) ninguna de las anteriores.

8. En física se entiende como caída libre, la caída:
a) en ausencia de gravedad.
b) en el aire.
c) en el satélite espacial.
d) en ausencia de todo roce.

9. La gravedad es una aceleración
a) igual en todo el universo.
b) siempre positiva.
c) es la misma para un mismo lugar.
d) que depende del cuerpo.

10. En el tiempo de vuelo, decimos que un cuerpo tarda:
a) más en subir que en bajar.
b) más en bajar que en subir.
c) lo mismo en subir que en bajar.
d) más el cuerpo más pesado.

11. En la caída libre los desplazamientos pueden ser:
a) positivos.
b) negativos.
c) ambos.
d) ninguna de las anteriores.

12. El movimiento de caída libre es:
a) uniforme.
b) uniformemente variado.
c) simplemente variado.
d) unas veces acelerado y otras uniforme.

13. En el movimiento vertical hacia arriba con velocidad inicial se cumple que la velocidad vertical V_y es igual:
a) V_0 sen α con $\alpha = 0^o$
b) V_0 cos α con $\alpha = 90^o$
c) V_0 cos α con $\alpha = 0^o$
d) V_0 sen α con $\alpha = 90^o$

14. En un lanzamiento horizontal en el vacío, es constante en magnitud:
a) la componente horizontal de la velocidad inicial.
b) la componente vertical de la velocidad inicial.
c) el módulo del desplazamiento horizontal.
d) la velocidad en cualquier instante.

Segunda parte.Verdadero falso

B. De las siguientes afirmaciones, señala cuáles son verdaderos y cuáles son falsas. Las que considere falsa explique por qué.

15. En el movimiento semiparabólico el tiempo de caída del proyectil depende de la altura del lanzamiento.

16. Cuando un cuerpo está sometido a la acción de varios movimientos, cada uno de ellos se cumple independiente porque cada uno actúa a diferentes intervalos de tiempo.

17. El tiempo necesario para que un proyectil disparado horizontalmente alcance el suelo es diferente si se dejase caer desde el reposo y desde la misma altura.

18. Dos cuerpos de pesos diferentes caen en un mismo lugar con diferente aceleración.

19. El alcance horizontal de un proyectil lanzado con ángulo de elevación es independiente del ángulo.

Tercera parte. Problemas

C. Resuelve los siguientes problemas:

20. Un bateador golpea una pelota con un ángulo de 35° y es recogida 6 s más tarde cuando x = 120 m. ¿Qué velocidad le proporcionó el bateador a la pelota?. **R: 24,4 m/s.**

21. Un bombardero viaja a una altura de 1200 m con una velocidad horizontal de 420 Km/h. Desde él se suelta una bomba con el fin de explotar un objetivo que está sobre la superficie de la tierra. ¿Cuántos metros, antes de llegar al punto, exactamente encima del objetivo, debe ser liberada la bomba para dar en el blanco?.
R: 1819,89 m

22. Un objeto A se deja caer libremente desde una altura de 80 m. Un segundo más tarde, un objeto B se lanza hacia debajo de tal forma que alcanza al objeto A justamente cuando éste llega al suelo. Determinar: a) ¿con qué rapidez se lanzó B? b) ¿qué rapidez llevaba el objeto A cuando fue alcanzado? c) ¿cuánto tiempo dura en el aire el objeto B?.
R: a) 11,42 m/s b) 39,592 m/s c) 3,04 s .

2.16 Movimiento circular

Antes de estudiar el movimiento circular y el movimiento circular uniforme tratemos de recordar algunos conceptos previos que nos ayudarán a comprender mejor las ideas.

Circunferencia es el conjunto de puntos del plano equidistante de un punto llamado centro, el cual notaremos como "O", tal y como lo muestra la figura 2.45. Una circunferencia posee los siguientes elementos:

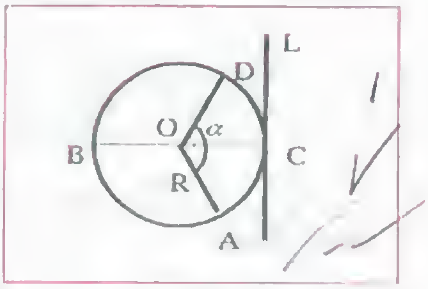


Figura 2.45

El radio es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella. En la figura 2.45 el segmento OA es el radio.

Diámetro es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro de ella. En la figura 2.45, BC es el diámetro y se observa que el diámetro es dos veces el radio.

Arco es la porción de la circunferencia determinada por dos puntos. El arco se denota con las letras asignadas a los puntos, colocando sobre ellas un arco, así:

CD se lee arco CD.

AC se lee arco AC.

Cuando da una vuelta completa, la longitud del arco coincide con la longitud de la circunferencia.

$$L = 2\pi R$$

Tangente es la recta que tiene un punto en común y sólo uno con la circunferencia. La recta L es una tangente a la circunferencia en el punto C de la figura 2.45.

Angulo central es todo ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. El ángulo α es un ángulo central en la figura 2.47.

es el segmento de recta dirigido desde el centro de la circunferencia a cualquier punto de ella. En la figura 2.46, R es un radio vector.

Movimiento circular uniforme: M.C.U.

Considerémos una partícula que gira en el sentido indicado por la flecha de la figura 2.46, la cual ocupa las posiciones a, b, c, d, e, f, g, hasta volver al punto a. Aquí se dice que la partícula ha descrito en su trayectoria una circunferencia, por lo que podemos definir el movimiento circular así:

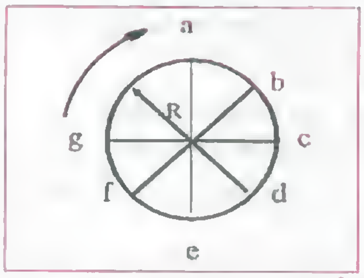


Figura 2.46

Movimiento Circular es el que tiene por trayectoria una circunferencia.

Movimiento Circular Uniforme es aquel en el cual la partícula en su trayectoria recorre arcos iguales en intervalos de tiempos iguales.

En la figura 2.46 se observa que: $\overset{\frown}{ab} = \overset{\frown}{bc} = \overset{\frown}{cd} = \overset{\frown}{de} = \overset{\frown}{ef} = \overset{\frown}{fg}$, y cada uno de ellos es recorrido en el mismo intervalo de tiempo.

¿Qué es un radián?. Consideremos la figura 2.47 donde se muestra una circunferencia de centro "O", radio R y arco ab. Si la longitud del arco ab es igual a la longitud del radio R, tendremos que el ángulo central es un radián. De acuerdo a esto se define:

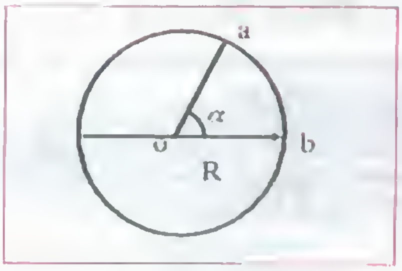


Figura 2.47

Un radián es el ángulo central de una circunferencia al que le corresponde un arco cuya longitud es igual al radio de la misma.

Según esta definición, para medir un ángulo en radianes basta ver las veces que la longitud del arco contiene a la del radio.

$$\alpha = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \alpha . R$$

- **Elementos del movimiento circular uniforme.**

El período es el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta completa. Lo designaremos con T:

$$\boxed{T = \frac{t}{n}}$$

donde n es el número de vueltas.

El período se expresa en minutos-segundos-horas.

*El período de rotación de la aguja que marca las horas en un reloj es 12 horas, porque ese es el tiempo que tarda en dar una vuelta.

*El período de rotación de la tierra es 24 horas, porque éste es el tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor de su eje.

*El período de la aguja que marca los minutos es de 1 hora ó 60 minutos ó 3600 segundos.

Movimiento periódico es el que repite a intervalos de tiempo iguales.

El movimiento circular uniforme es un movimiento periódico, por lo que el período también puede definirse así: es el intervalo de tiempo constante que ha de transcurrir en un movimiento periódico para que el movimiento se repita.

La frecuencia es el número de vueltas que da el móvil en la unidad de tiempo.

$$f = \frac{n}{t}$$

La frecuencia se mide en $\frac{1}{s} = s^{-1}$

- **Relación entre período y frecuencia.**

Las ecuaciones del período y de la frecuencia, definidas antes son:

$$T = \frac{t}{n} \quad y \quad f = \frac{n}{t}$$

Si multiplicamos miembro a miembro ambas ecuaciones, tenemos:

$$T . f = \frac{t}{n} . \frac{n}{t} \qquad T . f = 1$$

de donde

$$T = \frac{1}{f} \text{ ó } f = \frac{1}{T}$$

- **Velocidad angular.**

Como el **radio vector R** barre ángulos iguales en intervalos de tiempos iguales, podemos definir la velocidad angular así:

La velocidad angular es la magnitud medida por el cociente entre el ángulo descrito por el radio vector y el tiempo empleado en describirlo. Fig. 2.48

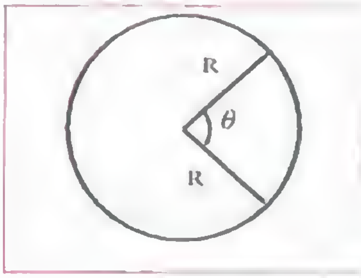


Figura 2.48

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}}$$

ω se mide en rad/s.

Cuando el ángulo barrido es un ángulo de giro igual a 2π, el tiempo empleado es un período, pudiéndose escribir que:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Velocidad lineal

Consideremos una partícula que describe un movimiento circular como la mostrada en la figura 2.49. Nótese que aparece un vector que llamaremos **velocidad tangencial** que es tangente a la trayectoria en cada punto. La magnitud de este vector se obtiene calculando el arco recorrido en la unidad de tiempo.

Cuando la partícula da una vuelta completa recorre un arco igual a la longitud de la circunferencia, empleando un tiempo igual a un período. De acuerdo a esto, puede escribirse:

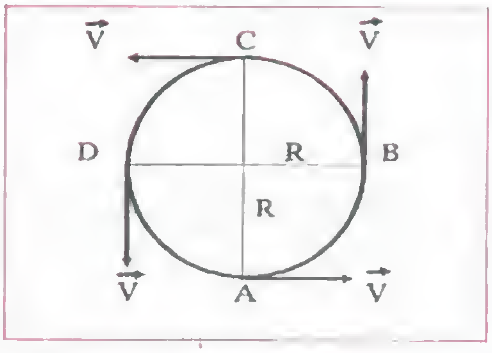


Figura 2.49

$$\boxed{V_t = \frac{\text{long arco}}{T}} \qquad \boxed{V_t = \frac{2\pi R}{T}}$$

Nótese que hemos sustituido la longitud del arco por la fórmula de la longitud de una circunferencia $L = 2\pi R$

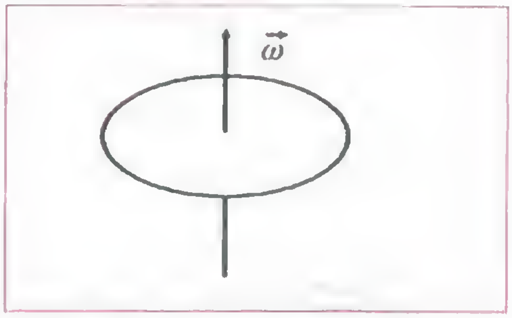


Figura. 2.50

• Representación gráfica de la velocidad angular.

La velocidad angular, al igual que la velocidad lineal, es una magnitud vectorial, la cual se representa mediante un vector que es perpendicular al plano de la circunferencia que describe la partícula. Su sentido es el mismo de avance de un tirabuzón, cuando gira en el mismo sentido que tiene el móvil o la partícula. Observa la figura 2.50.

Ecuación de la velocidad angular en función de la frecuencia. La ecuación de la velocidad angular en función del período es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{Pero} \qquad T = \frac{1}{f}$$

Luego:

$$\omega = \frac{2\pi}{1/f}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

Ecuación de la velocidad lineal en función de la frecuencia.

La ecuación de la velocidad lineal en función del período es:

$$V = \frac{2\pi R}{T} \qquad \text{Pero} \qquad T = \frac{1}{f}$$

luego,

$$V = \frac{2\pi R}{1/f}$$

$$\boxed{V = 2\pi R f}$$

• Relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular.

Las ecuaciones de la velocidad lineal y velocidad angular vienen dadas por:

$V_c = 2\pi R f$ ....(1)

$\omega = 2\pi f$ ....(2)

Si dividimos miembro a miembro la ecuación (1) entre la ecuación (2) nos queda:

$$\frac{V_c}{\omega} = \frac{2\pi Rf}{2\pi f}$$

$$\frac{V_c}{\omega} = R$$

de donde,

$$V_c = \omega \cdot R$$

Aceleración centrípeta

Cuando se estudió la aceleración en el movimiento rectilíneo, dijimos que ella no era más que el cambio constante que experimentaba la velocidad por unidad de tiempo. La velocidad cambiaba únicamente en valor numérico, no así en dirección.

Cuándo el móvil o la partícula (figura. 2.51) realiza un movimiento circular uniforme, es lógico pensar que en cada punto el valor numérico de la velocidad es el mismo, en cambio es fácil darse cuenta que la dirección de la velocidad va cambiando a cada instante. La variación de dirección del vector velocidad lineal origina una aceleración que llamaremos **aceleración centrípeta**. Esta aceleración tiene la dirección del radio, apuntando siempre hacia el centro de la circunferencia, razón por la cual también se le llama **aceleración radial**, y se muestra en la figura 2.51. Las direcciones de la velocidad tangencial y de la aceleración centrípeta, son perpendiculares.

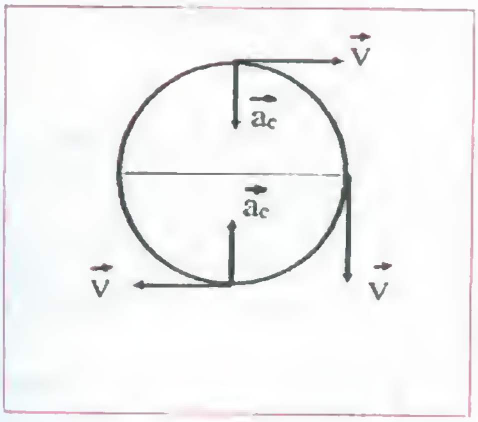


Figura. 2.51

• Ecuación de la aceleración centrípeta.

En la figura 2.52 se muestra una partícula que realiza un movimiento circular uniforme.

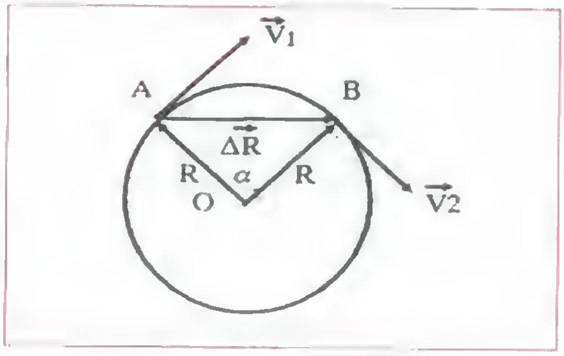


Figura. 2.52

En el punto A de su trayectoria tiene una velocidad. V_1 y en un intervalo de tiempo Δt ocupa el punto B con velocidad V_2. Aquí las dos velocidades difieren únicamente en dirección, pues sus magnitudes son iguales.

Por otra parte sabemos que la velocidad instantánea y la aceleración vienen dadas respectivamente por:

$$V = \frac{\Delta R}{\Delta t} \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{.......................(1)}$$

$$a = \frac{v}{t} \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{................... (2)}$$

Vectorialmente, el cambio de velocidad se obtiene haciendo la diferencia $V = V_2 - V_1$, la cual se muestra en la figura 2.53 donde se cambia el sentido del vector V_1 y se hace la suma vectorial.

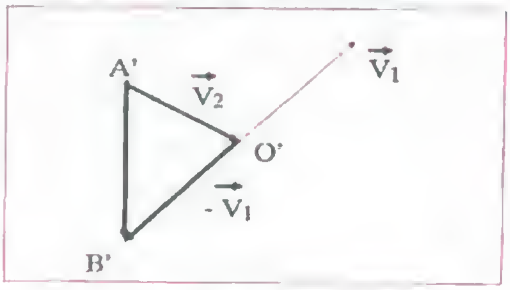


Figura 2.53

Observe que los triángulos OAB y O'A'B' son semejantes, por tener dos de sus lados respectivamente perpendiculares y al ser semejantes sus lados son proporcionales, pudiéndose escribir que:

$$\frac{\Delta V}{V_2} = \frac{\Delta R}{R}$$

Como $V_2 = V$ puede escribirse:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta R}{R}$$

Si dividimos a ambos miembros de la igualdad por Δt nos queda que:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} \qquad \text{.......................(3)}$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) se tiene que:

$$a \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{R} \cdot V$$

de donde:

$$\boxed{a = \frac{V^2}{R}}$$

Esta aceleración se llama **aceleración centrípeta** y la notaremos como a_c

$$a_c = \frac{V^2}{R} \qquad \text{.. (4)}$$

Esta expresión nos da el módulo de la aceleración centrípeta de la partícula en función de la velocidad tangencial y el radio. Por otra parte sabemos que la velocidad tangencial viene dada por $V = \omega.R$. Si sustituimos esta expresión en (4) nos queda que:

$$a_c = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 . R^2}{R}$$

$$\boxed{a_c = \omega^2 . R}$$

Esta expresión nos da el **módulo de la aceleración centrípeta en función de la velocidad angular y el radio.**

Problemas resueltos

Problema 1

Una rueda de 9 m de diámetro está girando de manera que da 15 vueltas en 0,5 minutos. Calcular: a) la velocidad lineal; b) la velocidad angular; c) la frecuencia; d) la aceleración centrípeta; e) ¿cuántas vueltas da en 1,5 minutos?; f) ¿cuánto tarda en dar 80 vueltas?.

Datos:

$D = 9$ m	$f = ?$
$R = 4,5$ m	$a_c = ?$
$n = 15$	$n = ?$
$t = 0,5$ min	$t = 1,5$ min
$= 0,5 . 60$ s	$= 1,5 . 60$ s
$= 30$ s	$= 90$ s
$V_c = ?$	$t = ?$
$\omega = ?$	$n = 80$

Solución:

a) La velocidad lineal viene dada por:

$$V = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\text{Pero } T = \frac{t}{n} = \frac{30 \text{ s}}{15} = 2 \text{ s}$$

Luego,

$$V = \frac{2\pi\ 4,5 \text{ m}}{2 \text{ s}}$$

$$\boxed{V = 14,13 \text{ m/s}}$$

b) La velocidad angular la calculamos así:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \text{ s}}$$

$$\boxed{\omega = 3,14 \text{ rad/s}}$$

c) La frecuencia viene dada por:

$$f = \frac{n}{t} = \frac{15}{30\ s}$$

$$f = 0{,}5\ s^{-1}$$

d) La aceleración centrípeta la calculamos a través de:

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \frac{(14{,}13\ m/s)^2}{4{,}5\ m}$$

$$\boxed{a_c = 44{,}37\ m/s^2}$$

e) El número de vueltas que da en 1,5 min = 90 s, viene dada usando la ecuación de frecuencia y despejando n:

$$f = \frac{n}{t} \longrightarrow n = f \cdot t$$

$$f = 0{,}55\ s^{-1} \cdot 90\ s$$

$$f = 49{,}5 \text{ vueltas}$$

f) El tiempo que tarda en dar 80 vueltas lo obtenemos usando la ecuación de frecuencia y despejando t:

$$f = \frac{n}{t} \longrightarrow t = \frac{n}{f} = \frac{80}{0{,}5\ s^{-1}}$$

$$\boxed{t = 160\ s}$$

2. Un satélite que está 300 Km por encima de la superficie terrestre gira alrededor de la tierra con una aceleración centrípeta de 0,009 Km/min^2. Calcular: a) la velocidad angular; b) el período; c) la frecuencia; d) la velocidad lineal. El radio de la tierra es 6370 Km.

Solución:

h_s: altura del satélite medida desde la superficie de la tierra hasta el satélite.

R_s: radio de la órbita del satélite, medido desde el centro de la tierra hasta el satélite.

R_t: radio de la tierra.

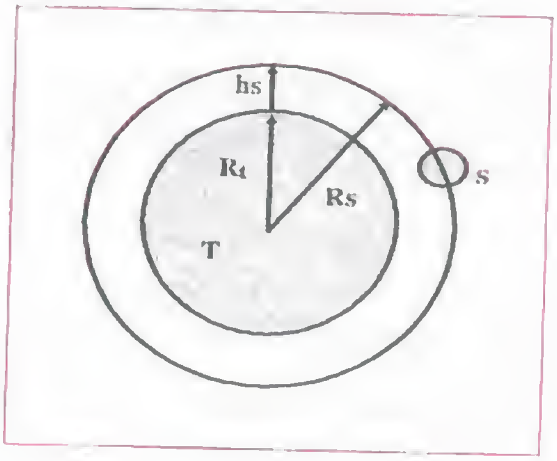


Figura. 2.54

Datos:

$h_s = 300$ Km
$\omega = ?$
$f = ?$
$a_c = 0{,}009\ Km/min^2$
$T = ?$
$V = ?$
$R_s = R_t + h_s$;
$= 6370\ Km + 300\ Km$
$R_s = 6670$ Km

Solución

a) Como se conoce la aceleración centrípeta y nos piden la velocidad angular, usamos la ecuación:

$$a_c = \omega^2 . R \longrightarrow \omega^2 = \frac{a_c}{R}$$

Sustituyendo los valores de la aceleración centrípeta y el radio del satélite, tenemos:

$$\omega^2 = \frac{0{,}009\ Km/min^2}{6670\ Km}$$

$$\omega^2 = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\ 1/min^2$$

Extrayendo raíz cuadrada:

ω = 0,00116 1/min.

b) Para obtener el período T usamos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{despejando T, obtenemos que:}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{0,00116 \ 1/\text{min}}$$

$$\boxed{T = 3925 \text{ min.}} \times \longrightarrow T = 5413,79 \text{ min}$$

c) La frecuencia se obtiene más fácilmente, despejando f de

T = 1/f. Quedándonos que:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3925 \text{ min}}$$

$f = 2,5.10^{-4}$ 1/min

d) La velocidad lineal viene dada así:

$V_c = \omega \, . \, R$

V_c = 0,00166 l/min . 6670 Km

V_c = 7,73 Km/min.

Problemas propuestos

1. Si la aguja que marca los minutos en un reloj mide 2,5 cm. Calcular: a) la velocidad angular; b) la velocidad centrípeta; c) la velocidad lineal. Usa el período de rotación de la aguja.

R: a) 1,74 . 10^{-3} rad/s

b) 7,57 . 10^{-8} m/s

c) 4,36 . 10^{-5} m/s

2. Se tiene una rueda que gira dando 10 vueltas en 2 minutos. Si el radio de la rueda es de 1,5 metros, calcular: a) frecuencia; b) período; c) velocidad lineal; d) velocidad angular; e) aceleración centrípeta; f) ¿cuántas vueltas da en 12 minutos? g) ¿cuánto tarda en dar 150 vueltas?.

R: a) 0,083 1/s; b) 12,05 s;

c) 0,78 m/s; d) 0,52 rad/s; e) 0,41 m/s^2;

f) 59,76 vueltas g) 1807,5 s.

3. ¿Cuál es la velocidad angular de un disco que describe 13,2 radianes en 6 s?. ¿Cuál es su período?. ¿Cuál es su frecuencia?.

R: 2,2 rad/s; 2,85 s; 0,35 1/s.

4. La tierra da una vuelta completa alrededor del sol en 365 días (movimiento de traslación). Si su distancia media al sol es $1,49.10^8$ Km. Calcular: a) velocidad angular; b) velocidad lineal; c) aceleración centrípeta.

R: a) 0,017 rad/día; b) 2,56 . 10^6 Km/día.

c) 4,39 . 10^4 Km/día^2.

5. Un satélite artificial de la tierra tarda $3,8.10^5$ s en dar una vuelta completa. Si su trayectoria es aproximadamente circular y se encuentra a 400 Km sobre la superficie de la tierra, calcular: a) la velocidad angular; b) la velocidad lineal; c) la aceleración centrípeta (Radio de la tierra: 6370 Km).

R: a) 0,069 rad/min; b) 467,13 Km/min;

c) 32,25 Km/ min^2.

6. La aceleración centrípeta de una rueda que gira es 3,8 m/s^2. Si el radio de la rueda es de 0,8 m; a) ¿cuál es su período?; b) ¿cuál es la frecuencia?.

R: a) 2,88 s; b) 0,347 1/s.

7. Se tienen dos ruedas cuyas frecuencias son f_1 = 20 1/min y f_2 = 10 1/min. Si el radio de la primera R_1 = 2 m, ¿cuál debe ser el radio de la segunda para que en el borde de la rueda gire con la misma velocidad lineal?.

R: 4 m.

8. Demuestra que la ecuación de aceleración centrípeta también puede escribirse:

$$a_c = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

9. Dos poleas de 12 cm y 18 cm de radio respectivamente se hallan conectadas por una banda. Si la polea de mayor radio da 7 vueltas en 5 s, ¿cuál es la frecuencia de la polea de menor radio?.

R: 2,1 s^{-1}.

10. Una polea en rotación tiene 12 cm de radio y un punto extremo gira con una velocidad de 64 cm/s. En otra polea de 15 cm de radio un punto extremo gira con una velocidad de 80 cm/s, ¿cuál es la velocidad angular de cada polea?.

R: 5,33 rad/s.

11. En un átomo, un electrón gira alrededor de un protón en una órbita circular de $5{,}28.10^{-11}$ m de radio con una rapidez de $2{,}18.10^{6}$ m/s, ¿cuál es la aceleración del electrón?.

R: $9{,}10^{22}$ m/s^2.

12. Un satélite artificial de la tierra se encuentra en una órbita, que se supone es una circunferencia, a una distancia de 400 Km sobre la superficie terrestre. Calcular la rapidez del satélite en su órbita, sabiendo que el radio medio de la tierra es 6.370 Km y la aceleración centrípeta es $2{,}6.10^{-4}$ m/s^2.

R: 41,95 m/s

13. ¿Cuál es el periodo de revolución de un satélite artificial de la tierra, que se mueve a una altura de 800 Km sobre ella, sabiendo que el radio medio de la tierra es 6.370 Km y la aceleración centripeta del satélite, a esa altura es $3{,}2.10^{-4}$ m/s^2?.

R: $9{,}8.10^{5}$ s – 261,1 h

2.17 Movimiento armónico simple

Introducción

Hasta el momento, en cursos anteriores y en el presente se han estudiado varios tipos de movimiento.

El movimiento rectilíneo uniforme, en el cual la magnitud de la velocidad es constante y no cambia de dirección.

El movimiento rectilíneo uniformemente variado, en el cual la aceleración es constante. La dirección de la velocidad permanece constante, aun cuando su módulo varía uniformemente.

El movimiento de proyectiles, analizado como combinación de los dos anteriores.

Gaunaná

El movimiento circular uniforme, donde la magnitud de la velocidad es constante, no así su dirección, que varía constantemente.

Existen algunos movimientos que se caracterizan por repetirse una y otra vez durante todo el tiempo en que se produce dicho movimiento. El movimiento de un columpio, la oscilación del péndulo de un reloj, el movimiento de las manecillas de un reloj, son movimientos periódicos.

Se llama movimiento periódico a aquel que se repite con características similares en intervalos de tiempos iguales.

Movimiento Armónico Simple.

Siempre que sobre un cuerpo elástico actúa una fuerza deformadora, inmediatamente aparece una fuerza elástica de restitución, llamada **fuerza recuperadora o restauradora** la cual es opuesta a la dirección del desplazamiento del cuerpo.

Matemáticamente puede escribirse de acuerdo con la Ley de Hooke que:

$F = -k.x$

F: la fuerza restauradora

x: es el desplazamiento.

El signo menos significa que la dirección de la fuerza F es opuesta al desplazamiento x, siendo x el desplazamiento del objeto con respecto a la posición de equilibrio y k la constante de elasticidad.

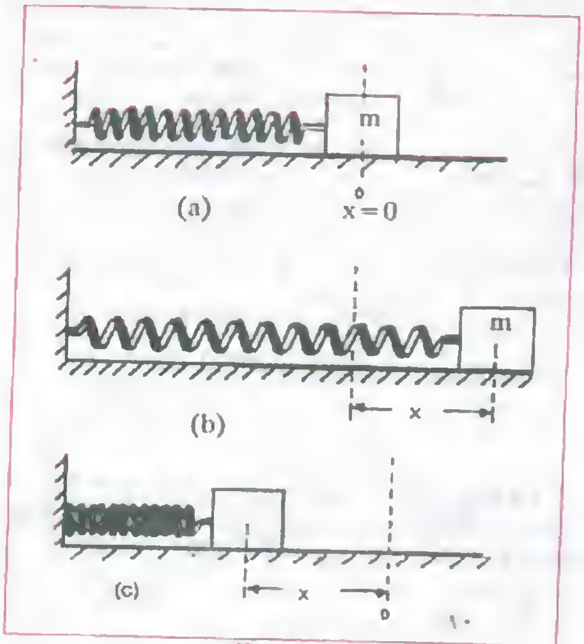


Figura 2.55

Consideremos una masa m, atada al extremo de un resorte, como lo indica la figura 2.55(a), la cual puede moverse libremente a lo largo de la dirección x en ambos sentidos.

Si a la masa m le aplicamos una fuerza hacia la derecha, como lo indica la figura. 2.55(b), recorrerá un desplazamiento x hacia la derecha de la posición de equilibrio. Al soltarla actuará la fuerza recuperadora del resorte, en sentido contrario a la fuerza deformadora, que tiende a llevarla de regreso hasta la posición de equilibrio $x = 0$.

A medida que se mueve hacia $x = 0$ desde la derecha, la velocidad aumenta, pero la fuerza disminuye y como consecuencia la aceleración también, tomando ésta el valor cero cuando el cuerpo pasa por la posición $x = 0$.

Una vez que su desplazamiento sea negativo, lado izquierdo de la posición $x = 0$, aparece una fuerza restauradora que va en aumento y la masa llegará a detenerse en la posición $-x$, para luego iniciar su viaje de regreso.

Si no hubiera pérdida de energía por efecto del rozamiento, el movimiento continuaría indefinidamente de un lado a otro, oscilando alrededor de la posición de equilibrio. Este tipo de movimiento oscilatorio en ausencia de rozamiento se llama **movimiento armónico simple**, por lo que definimos:

Se llama movimiento armónico simple (M.A.S.) a un movimiento periódico en ausencia de rozamiento, producido por la acción de una fuerza recuperadora que es directamente proporcional al desplazamiento y aplicada en la misma dirección pero de sentido opuesto.

La fuerza recuperadora F es proporcional al desplazamiento x, pero de sentido opuesto a él. Esto es, cuando la masa se desplaza hacia la derecha figura 2.55(b), x es positiva y la fuerza recuperadora es hacia la izquierda. Cuando la masa se desplaza hacia la izquierda de $x = 0$, entonces x es negativa y F es hacia la derecha.

De acuerdo con la Ley de Hooke:

$F = -k.x$ .... (1)

La fuerza que actúa sobre la masa produce una aceleración, por lo que puede escribirse de acuerdo con la segunda Ley de Newton:

$F = m.a$ .... (2)

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que:

$m \cdot a = -k.x$, de donde:

$$a = -\frac{k}{m} \cdot x$$

Esta última expresión nos indica que la aceleración es proporcional al desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio y en dirección opuesta, conduciéndonos al siguiente enunciado general.

Siempre que sobre una partícula actúe una fuerza linealmente proporcional al desplazamiento y en dirección opuesta, la partícula tendrá un movimiento armónico simple.

Elementos del movimiento armónico simple.

*** Oscilación o vibración completa. Es el movimiento realizado desde cualquier posición hasta regresar de nuevo a ella pasando por las posiciones intermedias. Así en la figura 2.56 se tiene una oscilación cuando una esferita que pende de un hilo sale de la posición N, va hasta M y vuelve a N pasando por la posición "O".**

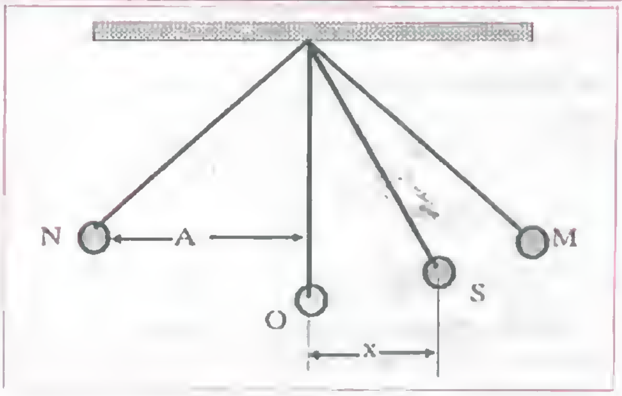


Figura. 2.56

• **Elongación**. Es el desplazamiento de la partícula que oscila desde la posición de equilibrio hasta cualquier posición en un instante dado. En la figura 2.56 "x" es la elongación, porque es el desplazamiento desde la posición de equilibrio "O" hasta la posición "S" en un instante determinado.

• **Amplitud** Es la máxima elongación, es decir, el desplazamiento máximo a partir de la posición de equilibrio. En la figura 2.56 la distancia "A" medida a partir de "O" es la amplitud.

* **Periodo.** Es el tiempo requerido para realizar una oscilación o vibración completa. Se designa con la letra "T" y se mide en segundos.

* **Frecuencia.** Es el número de oscilaciones o vibraciones realizadas por la partícula en la unidad de tiempo. La unidad de frecuencia usada en el S.I. es el ciclo/s, llamado también Hertz.

* **Posición de equilibrio.** Es la posición en la cual no actúa ninguna fuerza neta sobre la partícula oscilante. El punto "O" de la figura 2.56 representa la partícula en equilibrio.

Relación entre el M.A.S. y el circular uniforme.

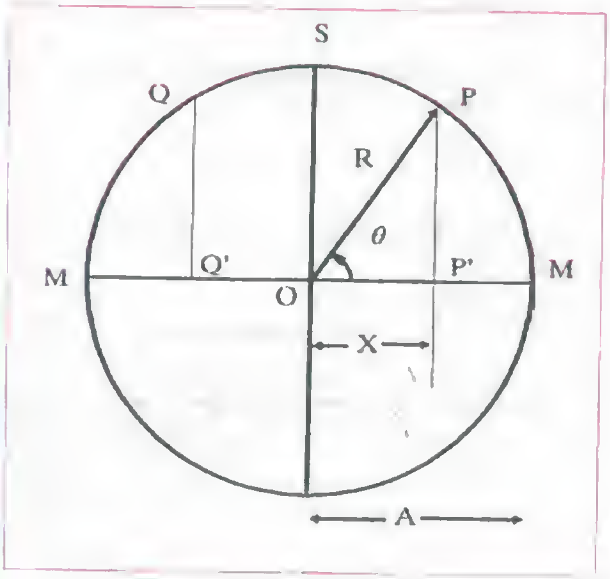


Figura 2.57(a)

Intentaremos relacionar el movimiento circular uniforme con el movimiento armónico simple. Para ello proyectaremos la trayectoria circular sobre cualquiera de los ejes, que coincida con uno de los diámetros de la circunferencia. Particularmente haremos la proyección sobre el eje horizontal, tal como lo indica la figura 2.57(a) la cual muestra una circunferencia de radio "R" y centro "O". Consideremos un punto P sobre la circunferencia y P' su proyección sobre el diámetro horizontal.

Cuando el punto pasa por M y va hasta la posición P, la proyección habrá ido desde M hasta P'. Si el punto P va hasta la posición S, P' se habrá movido hasta la posición "O" . Continuando el movimiento el punto S pasará a la posición Q y P' se habrá movido desde "O" hasta Q'.

Como podemos notar, mientras el punto P le da la vuelta a la circunferencia, su proyección P' sobre el diámetro horizontal habrá ido desde M hasta N y regresando de nuevo desde N hasta M, es decir, hay un movimiento de vaivén a lo largo del diámetro horizontal. De todo esto podemos decir que:

Un movimiento armónico simple es la proyección de la trayectoria de un movimiento circular uniforme sobre uno de los diámetros vertical u horizontal.

Ecuaciones del M.A.S.

Sabemos que el punto P que se mueve alrededor de la circunferencia cuando ésta gira, puede ser proyectado sobre el eje de las "X" o sobre el eje de las "Y". En nuestro caso usaremos las proyecciones de P sobre el eje "X", y encontraremos las ecuaciones de la **elongación, la velocidad y la aceleración.**

* Ecuación de la elongación.

Tratemos de deducir una expresión matemática de la elongación x en términos del tiempo t. Para ello nos remitiremos al triángulo OPP' de la figura 2.57(a).

Observando el triángulo y usando la definición de coseno podemos escribir que:

$$\cos\theta = \frac{x}{R} \qquad \text{de donde}$$

$$x = R \cdot \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots (1)$$

θ es el ángulo que forma el radio R de la circunferencia con el eje "x" medido en dirección opuesta al movimiento de las manecillas del reloj.

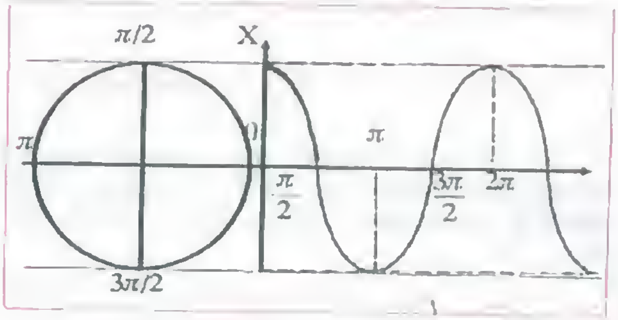


Figura 2.57(b)

Si damos valores al ángulo θ iguales a 0, $\pi/2$, $3\pi/2$ y 2π obtenemos la gráfica de la elongación x en función del ángulo. Observe la figura 2.57(b).

Por otra parte, sabemos por definición de velocidad angular:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \text{ de donde}$$

$$\theta = \omega . t \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que:

$$x = R. \cos \omega t$$

$$\mathbf{x = A.\cos \omega t}$$

(porque R = A)

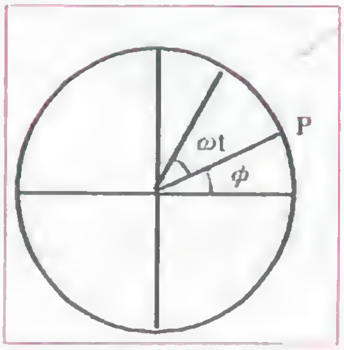


Figura 2.57(c)

Esta última es la ecuación de la elongación en función de la amplitud y la velocidad angular en cualquier intervalo de tiempo.

En el caso en que comencemos a medir el tiempo a partir de la posición P de la figura 2.57(c) (nótese que se ha recorrido previamente un ángulo ϕ) el valor de la elongación x vendrá dada por:

$$\mathbf{x = A \cos (\omega t + \phi)}$$

El ángulo ϕ se llama **constante de fase o ángulo de fase**, el cual se define como el ángulo que tiene el movimiento respecto al eje x en el instante t = 0.

La cantidad ($\omega t + \phi$) **recibe el nombre de fase del movimiento.**

Observación

Si comenzamos a contar el tiempo cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio se tendrá que $\phi = 0$ y para los cálculos posteriores usaremos la siguiente ecuación de la elongación:

$$\boxed{\mathbf{x = A \cos \omega t}}$$

* Ecuación de la velocidad en función del tiempo.

Observemos la figura 2.58, en donde V es el vector representativo de la velocidad lineal en el punto P, constante en magnitud pero variable en dirección.

Si V_x es la proyección de V sobre el eje x, puede escribirse que:

$$V_x = - V.\text{sen}\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Sabemos que $V = \omega.R$ y $\theta = w.t.$

Sustituyendo en (1) nos queda que:

$$V_x = - \omega.R.\,\text{sen}(\omega.t)$$

Como R = A se puede escribir:

$$V_x = -A.\omega.\text{sen}(\omega.t)$$

Si hacemos $w = 2\pi f$ nos queda:

$$\mathbf{V_x = - 2\pi f\, A\, \text{sen}\, (2\pi f t)}$$

* Ecuación de la velocidad en función de la elongación.

Sabemos que la velocidad en cualquier instante viene dada por:

$$V_x = - w.A\,\text{sen}\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Observando el triángulo POP' de la figura 2.58, se tiene que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{P'P}{OP} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$PP' = \sqrt{R^2 - X^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sabemos que $OP = R = A$ $\ldots\ldots\ldots (4)$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) se tiene:

$$\text{sen}\,\theta = \pm \frac{\sqrt{A^2 - X^2}}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sustituyendo (5) en (1), se tiene que:

$$V_x = \pm\ \omega.A \frac{\sqrt{A^2 - X^2}}{A}$$

de donde,

$$\boxed{V_x = \pm\ \omega \sqrt{A^2 - X^2}}$$

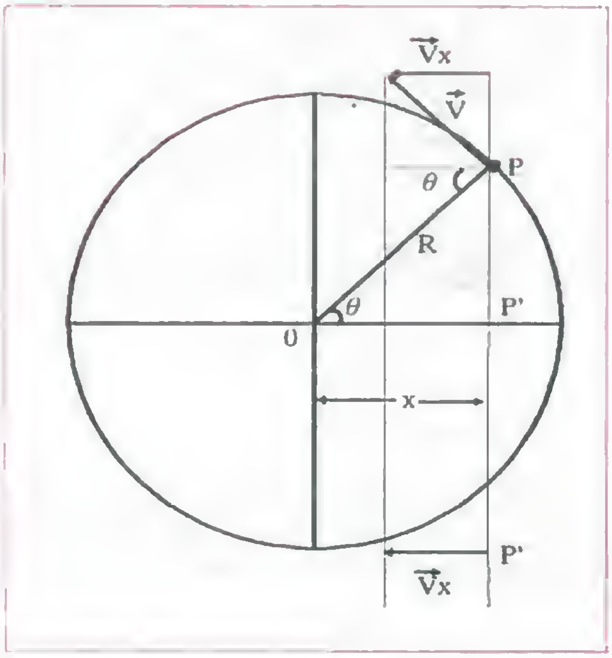


Figura 2.58

*** Ecuación de la aceleración.**

Sean a_c el vector representativo de la aceleración centrípeta (figura. 2.59) y a_x su proyección sobre el eje horizontal. De esta forma puede escribirse que:

$a_x = - a_c.\cos\theta$

Como $a_c = \omega^2.R$ nos queda:

$a_x = - \omega^2.R \cos\,\theta$

Como $R = A$ y $\theta = \omega t$, entonces

$$\boxed{a_x = - \omega^2.A \cos \omega\, t}$$

Esta es la **ecuación de la aceleración instantánea en función de la velocidad angular y de la amplitud.**

El signo negativo se debe a que la aceleración es proporcional al desplazamiento, pero con sentido opuesto.

Como $x = A \cos \omega t$ puede escribirse que:

$$\boxed{a_c = - \omega^2 . x}$$

Esta expresión representa **la ecuación de la aceleración instantánea en función de la elongación.**

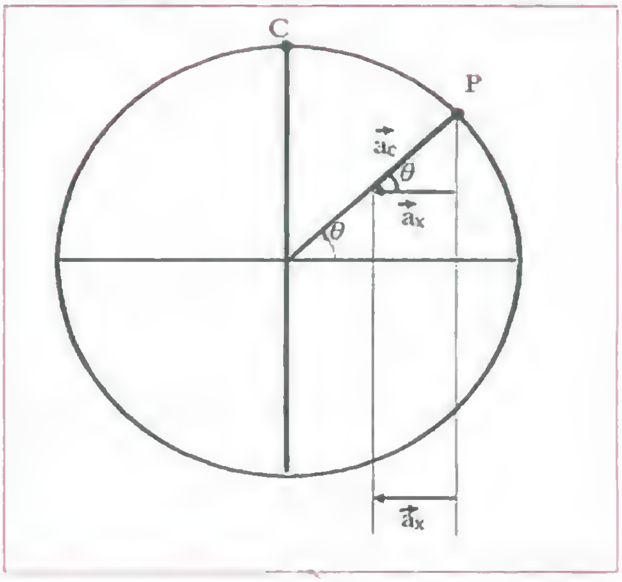


Figura. 2.59

• Ecuación del período para el sistema masa resorte.

Cuando se hizo el análisis del movimiento armónico simple en el caso del sistema masa resorte, vimos que la aceleración también es proporcional a la elongación según la expresión:

$$a = - \frac{k}{m} . x \quad \text{......................................} \quad (1)$$

Por otra parte la aceleración viene dada por:

$$a = - \omega^2 . x \quad \text{......................................} \quad (2)$$

De (1) y (2) podemos escribir que:

$$- \frac{k}{m} . x = - \omega^2 . x$$

Despejando ω^2 tenemos:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{......................................} \quad (3)$$

Como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ se tendrá que:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4)}$$

Sustituyendo (4) en (3) se tiene que:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}$$

Despejando T se tiene que:

$$T^2 = 4\,.\,\pi^2\,\frac{m}{k}$$

Extrayendo raíz a ambos miembros nos queda:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{m/k}}$$

Esta ecuación nos dice que: **el período de oscilación no depende de la amplitud**, sino de constantes propias del sistema masa resorte, como son k, la constante de elasticidad del resorte y la masa ubicada en su extremo.

El péndulo simple

Aquí haremos el estudio del **péndulo simple**, el cual es llamado así **porque consta de un cuerpo de masa m, suspendido de un hilo largo de longitud *l*, que cumple las condiciones siguientes:**

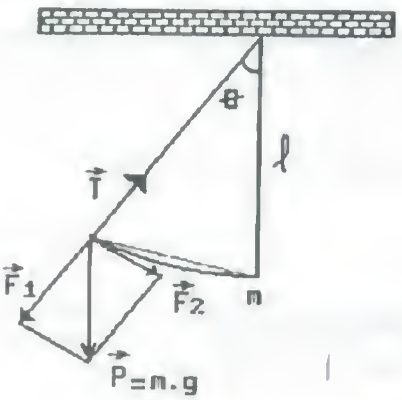


Figura 2.60

- El hilo es inextensible.
- Su masa es despreciable comparada con la masa del cuerpo
- El ángulo de desplazamiento que llamaremos θ debe ser pequeño

Separemos el péndulo de su posición de equilibrio (figura. 2.60), de tal manera que forme un ángulo con la vertical. Sea *l* la longitud del péndulo.

Las fuerzas que actúan sobre la masa "m" son:

T: la tensión del hilo

P: Su propio peso **P** = m.g

El peso del cuerpo lo descomponemos en dos componentes: F_1 y F_2, como lo indica la figura. 2.61, y nos conviene hacerlo de tal manera que formemos un triángulo rectángulo para usar las relaciones trigonométricas.

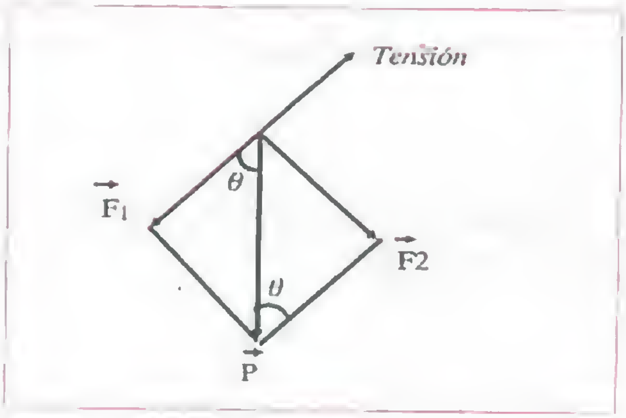


Figura. 2.61

Los vectores componentes serán: uno colineal con **T** cuyo módulo es:

$$F_1 = m.g.\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Otro perpendicular a **T** dado por:

$$F_2 = -\,m.g.\mathrm{sen}\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

El signo negativo indica el hecho de que F_2 actúa en la dirección opuesta a la del ángulo girado. Podemos decir que las fuerzas que actúan sobre la masa m son: **T**, F_1 y F_2.

Las fuerzas que están en la misma dirección del hilo originan una fuerza neta (fuerza centrípeta) que hace que el péndulo tenga una trayectoria circular, pudiéndose escribir que:

$$T - F_1 = \frac{m \cdot V}{l} \qquad \text{(observe que } R = l\text{)}$$

Sustituyendo F_1 de la ecuación (1) por su valor, se tiene que:

$$T - m.g.\cos\theta = \frac{m \cdot V}{l}$$

Si ahora analizamos F_2, que es la perpendicular a la dirección del hilo, tendremos que es una **fuerza restauradora** dirigida hacia la posición de equilibrio, considerándose negativa porque se opone al movimiento del péudulo, pudiéndose escribir que:

$$F_2 = m.g.\operatorname{sen}\theta \quad \text{..................................(3)}$$

Debemos encontrar ahora una relación que involucre a sen θ con la longitud del hilo y el arco de la trayectoria x.

Observando la figura. 2.62 y aplicando la definición del sen escribimos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{l}$$

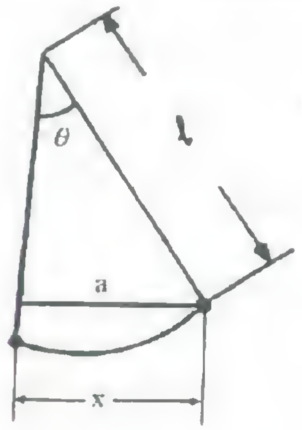


Figura. 2.62

Como las desviaciones del ángulo θ son pequeñas (menores de 5 grados) la longitud del arco x, y la distancia "a" son casi iguales y además se puede aproximar el valor de sen θ por θ en radianes, es decir:

$$\operatorname{sen}\theta = \theta \text{ (rad)}$$

De acuerdo a esto podemos escribir que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{l} = \theta \quad \text{..................................(4)}$$

Sustituyendo (4) en (3), tenemos que:

$$F_2 = -\frac{x}{l}\, m.g$$

$$F_2 = -\frac{m \cdot g}{l}\, x$$

Esta expresión es de la forma $F = -k.x$ indicándonos que para desplazamientos pequeños la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento y su sentido es opuesto al de éste.

Para pequeños desplazamientos angulares, el movimiento de un péndulo, es armónico simple.

En este caso, la constante de recuperación k es:

$$k = \frac{m \cdot g}{l} \quad \text{..(5)}$$

Por otra parte, el período T de un M.A.S. habíamos dicho que era:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{..................................(6)}$$

Sustituyendo (5) en (6), nos queda:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}} \quad \text{de donde}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Esta expresión es justamente la fórmula del período del péndulo cuando su amplitud no excede de 5°. De ella se desprenden los factores de los cuales depende su período y se conocen con el nombre de leyes del péndulo, las cuales pueden ser enunciadas así:

El período de un péndulo es:

1. **Independiente de la masa.** Observe que en la expresión no figura el factor masa.

2. **Directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud.**

3. **Inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.**

4. Independiente de la amplitud **mientras no exceda de 5.**

Aplicaciones del péndulo

- Nos sirve para medir el valor de la aceleración de gravedad en cualquier lugar de la tierra.
- Es utilizado como instrumento para medir el tiempo, lo que ha servido para la fabricación de relojes.

Problemas resueltos

Problema 1

Se tiene un objeto que oscila con M.A.S. Si la amplitud del movimiento es de 15 cm y el período es de 2 s, encontrar las magnitudes de la velocidad y la aceleración cuando: a) x = O cm ; b) x = + 7,5 cm.

Datos

A = 15 cm = 0,15 m
T = 2 s
V = ?
a = ?
x = 0 cm
x = + 7,5 cm = + 7,5.10-2 m.

Solución

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14\ (\text{rad})}{2\ \text{s}}$$

$$\omega = 3{,}14\ \text{rad/s}$$

a) La magnitud de la velocidad, cuando x = 0 cm la calculamos usando la ecuación:

$$V = \pm\ \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Sustituyendo los valores:

$$V = \pm\ 3{,}14 . s^{-1} . 0{,}15\ \text{m}$$

$$V = \pm\ 0{,}47\ \text{m/s}$$

La aceleración, cuando x = 0 cm será:

$$a = -\omega^2 . 0 = 0$$

b) La magnitud de la velocidad viene dada para x = + 7,5 cm como:

$$V = \pm\ \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$V = \pm\ 3{,}14 . s^{-1} \sqrt{(0{,}15\text{m})^2 - (7{,}5.10^{-2}\ \text{m})^2}$$

$$V = \pm\ 3{,}14\ s^{-1} \sqrt{0.01687\ \text{m}^2}$$

$$V = 3{,}14\ s^{-1} . 0{,}129\ \text{m}$$

$$V = +\ 0{,}405\ \text{m/s}$$

La magnitud de la aceleración es:

$$a = -\omega^2 . x$$

$$a = -(3{,}14\ s^{-1})^2 . 7{,}5.10^{-2}\ \text{m}$$

$$a = -0{,}379\ \text{m/s}^2$$

Problema 2

Un cuerpo de masa 12 g se mueve con M.A.S., con un período de 4 s. Si la amplitud del movimien-

to es 24 cm y en el instante $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio en sentido positivo, calcular en el instante $t = 0{,}5$ s a) la posición del cuerpo; b) la magnitud de la aceleración; c) la magnitud de la fuerza que actúa sobre el cuerpo. d) calcular además la velocidad del cuerpo cuando $x = -12$ cm.

Solución

De acuerdo a los datos conocemos:

la masa: $m = 12$ g

amplitud: $A = 24$ cm

período: $T = 4$ s

De la ecuación de período obtenemos la ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\,s}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}\ s^{-1} = 0{,}5\ s^{-1}$$

a) La posición del cuerpo en el instante $t = 0{,}5$ s, la obtenemos usando la ecuación de la elongación:

$x = A \cos \omega . t$

Sustituyendo por los valores, tenemos que:

$x = 24 cm . \cos(\ \pi/2 . 0{,}5\ s^{-1} . 0{,}5\ s)$

$x = 24\ cm . \cos(\pi/4)$

$x = 24\ cm . \cos 45^{o}$ (porque $\pi = 180^{o}$)

$x = 18{,}25$ cm

b) La magnitud de la aceleración para $t = 0{,}5$ s viene dada por:

$a = -\omega^{2} A \cos(\omega\ t)$

$a = -(\pi/2)^{2} . 24\ cm . \cos(\pi/2\ s^{-1} . 0{,}5\ s)$

$a = -\pi^{2}/4 . 24\ cm . \cos(\pi/4)$

$a = -10\pi/4 . 24\ cm . \cos 45^{o}$

$a = -42{,}43\ cm/s^{2}$

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es:

$F = m . a = 12\ g . 42{,}43\ cm/s^{2}$

$F = 509{,}16$ dinas

d) Para calcular la velocidad del cuerpo cuando $x = -12$ cm, usamos la ecuación:

$$V = \pm\ \omega \sqrt{A^{2} - x^{2}}$$

$$V = \pm\ (\pi/2\ s^{-1}) . \sqrt{(24\ cm)^{2} - (-12\ cm)^{2}}$$

$$V = \pm\ \pi/2\ s^{-1} . \sqrt{576\ cm^{2} - 144\ cm^{2}}$$

$$V = \pm\ \pi/2\ s^{-1} . \sqrt{432\ cm^{2}}$$

$$V = \pm\ \pi/2\ s^{-1} . 20.78\ cm$$

$$\mathbf{V = \pm\ 32{,}62\ cm/s}$$

Problema 3

Se tiene un péndulo cuyo período es 2 s. Encuentre la longitud en metros.

Datos:

$T = 2$ s
$g = 9{,}8\ m/s^{2}$

Solución

La longitud del péndulo la obtenemos partiendo de la ecuación del período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Tratemos de despejar l elevando al cuadrado a ambos miembros:

$$T^{2} = \left(2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\right)^{2}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$, de donde

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Sustituyendo g y T por sus valores, tenemos que:

$$l = \frac{9{,}8\ m/s^2 . 4\ s^2}{4.10}$$

$$l = 0{,}98\ m$$

Problema 4

Se tiene un péndulo de 2,5 m de longitud, oscilando con una amplitud de 30 cm. Calcular: a) la velocidad del péndulo en el punto más bajo; b) la aceleración en los extremos de la trayectoria.

$$\boxed{\begin{array}{l} l = 2{,}5\ m \\ A = 30\ cm = 0{,}3\ m \end{array}}$$

a) En el punto más bajo del movimiento del péndulo, la velocidad es máxima y la elongación es $x = 0$.

Esta velocidad se calcula mediante la ecuación:

$$V = \pm\ \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Como $x = 0$ se tiene que:

$$V = \pm\ \omega . A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

El período lo obtenemos usando la ecuación del período de un péndulo.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{2{,}5\ m}{9{,}8\ m/s^2}}$$

$$T = 6{,}28 . 0{,}5\ s$$

$$T = 3{,}14\ s$$

La velocidad angular sera:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3{,}14\ s} = 2\ rad/s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) y $A = 0{,}3$ m, tenemos que:

$$V = 2\ s^{-1} . 0{,}3\ m$$

$$\mathbf{V = 0{,}6\ m/s}$$

b) En los extremos de la trayectoria, la aceleración es máxima, por lo que la elongación x, coincide con la amplitud A.

$$a = -\ \omega^2 . A$$

$$a = -\ (2\ s^{-1})^2 . 0{,}3\ m$$

$$\mathbf{a = -\ 1{,}2\ m/s^2}$$

Problema 5

Un resorte se alarga 0,2 m cuando sobre él se cuelga una masa de 0,04 Kg. La masa se sustituye por otra de 0,06 Kg y se estira 20 cm de su posición de equilibrio abandonándose luego. Hallar: a) la constante de elasticidad del resorte; b) el periodo de oscilación; c) la ecuación de la elongación en función del tiempo; d) la velocidad de la masa cuando se desvie 2 cm de la posición de equilibrio.

Solución

a) Calculamos el peso a partir de la masa $m = 0{,}04$ Kg

$$P = F = m . g$$

$$P = 0{,}04\ Kg . 9{,}8\ m/s^2$$

$$P = 0{,}392\ N$$

Aplicando la ley de Hooke obtenemos la constante de elasticidad así:

$$k = \frac{F}{x}$$

$$k = \frac{0{,}392\ N}{0{,}2\ m} = 1{,}96\ N/m$$

b) El período de oscilación lo calculamos usando la expresión

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Sustituyendo m y k por sus valores se tiene que:

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{0{,}06\ Kg}{1{,}96\ N/m}}$$

T = 1,098 s

c) Para obtener la ecuación de la elongación debemos calcular primero ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28}{1{,}098\ s} = 5{,}7\ rad/s$$

La ecuación de la elongación viene dada por:

$x = A\ .\ \omega.\ \cos(\omega t)$

Sustituyendo los valores A y ω se tiene:

$x = 0{,}2 \cos(5{,}7\ .\ t)$ m

d) La velocidad de la masa cuando x = 0,02 m viene dada por la expresión:

$$V = \pm\ \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Sustituyendo A, ω y x por sus valores tenemos que:

$$V = \pm\ 5{,}7\ rad/s \sqrt{(0{,}2\ m)^2 - (0{,}02)^2}$$

$V = \pm\ 1{,}134$ m/s

Los dos signos nos indican que la masa puede estarse moviendo hacia la izquierda o hacia la derecha en ese instante.

Problema 6

Un péndulo tiene 60 cm de longitud. ¿Cuál debe ser la longitud de otro péndulo que tenga la mitad del período del péndulo anterior?.

Solución

Como datos del problema se tiene que l = 60 cm. Con este valor procedemos a calcular el período.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{0{,}6\ m}{9{,}8\ m/s}} = 1{,}55\ s$$

La longitud de un péndulo que tenga la mitad del período anterior, se obtiene despejando l de la ecuación del período con:

T = 1.55 s/2 = 0,775 s

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \ \frac{l}{g}$$

de donde:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$l = \frac{9{,}8\ m/s^2.(0{,}775\ s)^2}{4\ .\ (3{,}14)^2}$$

l **= 0,149 m**

Problema 7

La ecuación de la elongación para un M.A.S. en un instante viene dada a través de la ecuación:

$x = 0{,}2 \cos(\pi\ t)$ m.

Si t está expresado en segundos. Calcular: a) la amplitud; b) la frecuencia angular; c) el período; d)

la frecuencia del movimiento; c) obtener las ecuaciones de la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

Solución

Para resolver este ejemplo debemos establecer comparaciones por analogía entre la ecuación dada de la elongación y la ecuación dada en el problema.

$x = 0{,}2 \cos (\pi \,.\, t)$

$x = A \cos (\omega t)$

Comparando cada uno de los elementos obtenemos:

a) Para la amplitud

$A = 0{,}2$ m

b) Para la frecuencia angular

$\omega = \pi\ s^{-1}$

c) El período lo obtenemos de:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{de donde}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi\ s^{-1}}$$

$T = 2$ s

e) La ecuación de la velocidad en función del tiempo es:

$V = - A\, \omega\, \text{sen}(\omega t)$

Sustituyendo en A y ω por sus valores tenemos que:

$V = - 0.2\ .\ \text{sen}\ (\omega\ t)$

La ecuación de la aceleración en función del tiempo es:

$a = - \omega\ A \cos (\omega t)$

Sustituyendo en ω y A por sus valores nos queda que:

$\boxed{a = - 0{,}2\ .\cos\ (\ t)\ m/s^2}$

Problemas propuestos

1. Un objeto se mueve con M.A.S. de amplitud 24 cm y período 1,2 s. a) Calcular la velocidad del cuerpo cuando se encuentra en la posición media y cuando está a 24 cm; b) ¿cuál es la magnitud de la aceleración en cada caso?.

R: a) 135 cm/s y 0 cm/s

b) 0 cm/s^2 y 659 cm/s^2

2. Un objeto de 6,2 Kg se cuelga de una balanza de resorte y realiza una oscilación cada 0,3 s. ¿Cuál es la constante de elasticidad del resorte?; b) ¿cuánto se acorta el resorte al quitar el objeto?. Usar = 10

R: a) 2755,5 N/m; b) 0,022 m

3. Una lámina metálica flexible vibra 5 veces en cada segundo. En el extremo de ella está colocado un objeto de 1,8 Kg. Calcular: a) la magnitud de la fuerza necesaria para mover el objeto 1,5 cm de su posición de equilibrio; b) la aceleración del objeto cuando su elongación es + 1,2 cm.

R: a) 27 New; b) - 12 m/s^2

4. Un cuerpo oscila con M.A.S. según la expresión de la elongación dada por:
$x = 6 \cos (3\pi t + \pi /3)$
con x(m), t(s) y los valores entre paréntesis en radianes. Calcular: a) la elongación, la velocidad, la aceleración y la fase del movimiento cuando t = 2 s; b) la frecuencia y el período del movimiento.
Recuerda que la ecuación general de la elongación cuando el ángulo de fase no es cero viene dada por:

$x = A \cos (\omega t + \theta)$

R: a) 3 m : - 49 m/s ; - 270 m/s^2 ; 20 rad;

b) 1,5 Hz; 0,67 s.

5. Una partícula realiza un M.A.S. lineal alrededor de un punto x = 0. En t = 0 tiene una elongación x = 0,37 cm y la magnitud de la velocidad es cero. Si la frecuencia del movimiento viene dada por 0,25 s^{-1}. Calcular: a) el período; b) la frecuencia angular; c) la amplitud; d) la ecuación de la elongación en función del tiempo; e) la ecuación de la velocidad en función del tiempo; f) la elongación para el valor t = 3 s.

R: a) 4 s; b) /2 rad/s ;c)0,37 cm ;

d) 0,37 cos (t/2) cm

e) - 0,58 sen (t/2) m/s f) 0

6. Un resorte tiene una vibración cuyo período es de 2 s cuando en su extremo se ubica una masa m. Cuando ésta masa aumenta en 2 Kg el período es 3 s. Calcular el valor de m.

R: 1,6 Kg.

7. La elongación de una partícula está dada por la ecuación:

x = 25 cos 4t, con x en mm y t en segundos.

Calcular: a) la amplitud; b) la frecuencia y período; c) la ecuación de la velocidad en función del tiempo y el valor máximo de ella; d) el valor máximo de la aceleración.

R: a) 0,025 m; b) 1,57 y 0,636 s;

c) V = - 0,1 sen 4t y 0,1 m/s; d) 0,4 m/s^2

8. Una esfera de masa 20 gramos pende de un muelle cuya masa es despreciable y cuya constante elástica es 50 N/m. Se separa la masa 5 cm de su posición de equilibrio y comienza a oscilar. Calcular: a) el período de oscilación; b) la ecuación del movimiento de oscilación.

R: a) 0,04 s = 0,126 s; b) 0,05 cos 50t.

9. Un punto material oscila con un M.A.S. de amplitud 2 cm y período 2 s. Si la elongación es 2 cm cuando t = 0, calcular la posición y la velocidad cuando t = 4,36 s.

R: x = 0,019 m ; V = 1,52 cm/s.

10. La escala de una balanza de resorte alcanza desde 0 hasta 14,4 Kg teniendo una longitud de 0,1 m. De la balanza se suspende un paquete y éste oscila verticalmente con una frecuencia de 2 hertz. ¿cuánto pesa el paquete?.

R: 86,4 N

11. Un automóvil está montado sobre unos resortes y estos están ajustados de tal manera que oscilan con una frecuencia de 3 hertz. ¡Cuál es la constante elástica si el automóvil tiene una masa de 1600 Kg?; ¿cuál será la frecuencia de oscilación si se suben 4 pasajeros cuyo peso promedio es de 72 kilopondios?.

R: 57600 N/m ; 1,13 1/s.

12. El extremo de un resorte vibra con un período de 3 s cuando se le coloca una masa "m". Se determina que el período aumenta en una unidad cuando la masa aumenta en 2,5 Kg. ¿Cuál es el valor de la masa "m"?.

R: 3,21 Kg

13. Se desea construir un péndulo que tenga un período de 0,5 s. Se comete un error y su longitud se hace 0,01 m más largo. ¿Cuánto se atrasa este péndulo en 6 s?. Usa g = 9,8 m/s^2.

R: 2,1 s

14. El péndulo de un reloj tiene un período de 3 s cuando g = 9,8 m/s^2. Si su longitud se acorta en 2 mm, ¿cuánto se habrá adelantado el reloj después de 24 horas?.

R: 864 s

15. Un bloque de 4 Kg de masa estira un resorte 16 cm cuando se suspende de él. El bloque se quita y un cuerpo de 0,5 Kg se cuelga ahora del resorte. El resorte se estira y después se suelta. ¿Cuál es el período de movimiento?.

R: 0,28 s

16. Una masa está suspendida de un resorte. Si éste se estira 8 cm partiendo de su longitud normal y se le suelta después, el sistema vibra con una frecuencia de 4 s^{-1}. Si la masa inicial es sustituida por otra que es mayor en 0,040 Kg el sistema vibra a 2,7 1/s. Calcular el valor de la masa inicial.

R: 33,5 g.

17. Un cuerpo de 0,91 Kg vibra con un M.A.S. de 4 s de período y amplitud de 25,4 cm. Calcular: a) la velocidad máxima; b) la aceleración máxima; c) la fuerza máxima efectuada sobre el cuerpo; d) si en t = 0 la partícula está en el origen moviéndose hacia la derecha. Calcular la posición, la velocidad y la aceleración en el instante t = 0,7 s.

R: a) 39,9 cm/s; b) 62,6 cm/s^2; c) 0,569 N;

d) 25,38 cm; 1582 cm/s y 62,55 cm/s^2.

18. Un cuerpo vibra con M.A.S. con una amplitud de 15 cm y una frecuencia de 40 vibraciones por minuto. Calcular la velocidad y la aceleración cuando el cuerpo se encuentre a 7,5 cm de la posición de equilibrio.

R: 53,84 cm/s ; 261 cm/s^2.

19. Calcular el periodo de un péndulo simple de 90,5 cm de longitud. ¿Cuál será la longitud de un péndulo que tenga exactamente la mitad de este período. Use g = 9,8 m/s^2.

R: 1,91 s ; 22,3 cm.

20. Se tiene un péndulo simple de 115 cm de longitud situado en un lugar donde $g = 9,79\ m/s^2$. ¿Cuál es la frecuencia de este péndulo?.

R: 0,465 osc/s.

21. Un cuerpo de 4 Kg se hace vibrar con M.A.S. por medio de un muelle. Si la amplitud es 30 cm y el tiempo invertido en una oscilación completa es 0,60 s, calcular la velocidad máxima y la fuerza resultante sobre el cuerpo en la máxima elongación.

R: 312,7 cm/s ; 132 N.

22. Una masa de 2 Kg cuelga de un resorte y produce sobre éste un alargamiento de 20 cm. a) Calcule la constante de rigidez del resorte; b) ¿cuál será el período de vibración de la masa de 2 Kg suspendida en el resorte?.

R: a) 98 N/m ; 0,898 s.

23. La escala de una balanza de resorte tiene 20 cm de longitud y marca un mínimo de 0 Kg y un máximo de 18 Kg tiene. Cuando se suspende un cuerpo de ella oscila verticalmente con una frecuencia de 1,5 vibraciones/s. ¿Cuál es el peso del cuerpo?.

R:94,13 N

24. Un resorte se alarga 27 cm cuando de él se cuelga un cuerpo que pesa 2,2 kilopondios. Calcular la frecuencia de vibración de un cuerpo de 4.4 Kg suspendido de dicho resorte.

R: 0,67 l/s

25. Se tiene un cuerpo de 0,05 Kg que al colgarlo de un resorte produce un alargamiento de 2 cm. ¿Cuál debe ser la masa de otro objeto que al colgarlo del muelle produce oscilaciones de período 0,568 s?.

R: 0,19 Kg.

26. Un péndulo simple ha sido ajustado de tal forma que su período sea 3 s. Si acortamos su longitud en 1,08 cm, ¿en cuánto varió el período?. Use $\pi^2 = 10$ y $g = 9,8\ m/s^2$

R: 0,87 s

Preguntas

1. Si un astronauta lleva un reloj de péndulo a la luna: a) el reloj ¿se adelanta o se atrasa?, explique; b)¿deberá el astronauta aumentar o disminuir la longitud del péndulo para calibrar el reloj?, explique.

2. ¿Cuál es el período y la frecuencia de un resorte que vibra 30 veces en 45 s?.

3. Se coloca una regla graduada verticalmente detrás de un cuerpo colgado de un resorte. Si el cuerpo vibra entre las marcas 20 cm y 32 cm de la regla, encuentre: a) la posición de equilibrio; b) la amplitud; c) los desplazamientos cuando el cuerpo está en las marcas 20 cm, 26 cm y 30 cm.

4. ¿Por qué crees que son raros los movimientos armónicos simples en la naturaleza?. Explique.

5. ¿Cambiaría la frecuencia de oscilación de un péndulo simple llevado a la luna con respecto a la frecuencia de oscilación en la tierra?. Explique.

6. Un cuerpo de masa m ejecuta un M.A.S. en el extremo de un resorte cuya constante elástica es k. Escribir la expresión de la longitud de un péndulo simple que tenga el mismo período del cuerpo sujeto al resorte, en función del peso y de la constante de elasticidad.

7. ¿En qué proporcionalidad variará el período de un péndulo cuando la longitud se cuadruplica?.

8. En la figura 2.63 se tiene un esquema que representa un M.A.S. Considerar los valores (positivos, negativos o nulos) de la elongación "x", la velocidad "V" y la aceleración "a" en cada uno de los casos siguientes. Cuando el móvil: a) se encuentra en O dirigiéndose hacia A ; b) se encuentra en O dirigiéndose hacia A ; c) llega a A ; d) se encuentra en O dirigiéndose hacia O ; e) pasa por O en su camino hacia B ; f) pasa por R en su camino hacia B ; g) llega a B ; h) pasa por R en su camino hacia O.

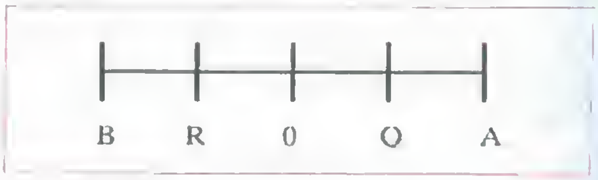


Figura 2.63

Autoevaluación 4

Movimiento circular. Movimiento armónico simple

Primera parte. Selección

A continuación se te presentan una serie de proposiciones con cuatro alternativas. Selecciona la letra de la alternativa correcta.

1. El movimiento oscilatorio se realiza alrededor de su posición de equilibrio.
a) una sola vez.
b) dos veces.
c) muchas veces.
d) ni una sola vez.

2. El tiempo necesario para efectuar una oscilación completa se llama:
a) amplitud
b) periodicidad.
c) tiempo de recorrido.
d) período de oscilación.

3. La proyección de un movimiento circular uniforme sobre el diámetro horizontal o vertical de la trayectoria es un movimiento:
a) irregular.
b) armónico simple.
c) circular.
d) giratorio.

4. La periodicidad del movimiento armónico simple es la misma que la del movimiento circular uniforme porque:
a) es el mismo movimiento.
b) tiene la misma trayectoria.
c) emplea el mismo tiempo para repetirse.
d) son movimientos ondulatorios.

5. Un M.A.S. se caracteriza por $x = 10 \cos (3{,}14t)$ cm en donde t se da en segundos. El período del sistema es:
a) 3,14 s.
b) 5 s.
c) 2 s.
d) 6,28 s.

6. El M.A.S. es producido por una fuerza de restitución:
a) proporcional al desplazamiento.
b) proporcional al período.
c) inversamente proporcional al desplazamiento.
d) proporcional a la aceleración.

7. Una expresión para la velocidad en el M.A.S. es:
a) $Vx = - V \cos 2 t$.
b) $Vx = - \omega R \cos \omega t$.
c) $Vx = \omega \cos \omega t$.
d) $Vx = V \cos \omega t$.

8. Una de las condiciones que debe cumplir un péndulo simple es:
a) masa del hilo despreciable comparada con la masa del cuerpo.
b) hilo de longitud corta.
c) ángulos de desplazamiento grande
d) el hilo es extensible.

9.Los factores de los cuales depende el período de un péndulo son:
a) masa-longitud-gravedad.
b) masa-longitud.
c) masa-gravedad
d) longitud-gravedad.

10. En un M.A.S. en el momento de pasar por el punto de equilibrio tiene su máximo valor
a) la aceleración.
b) la fuerza recuperadora.
c) la velocidad.
d) todas las anteriores.

11. Para reducir a la mitad el período de un péndulo, la longitud se debe:
a) reducir a la mitad.
b) duplicar
c) cuadruplicar
c) reducir a la cuarta parte.

12. Si la masa que oscila suspendida de un resorte se cuadruplica, entonces el período:
a) se cuadruplica.
b) se duplica.
c) se reduce a la cuarta parte.
d) se reduce a la mitad.

B. Segunda Parte. Verdadero-Falso

De las siguientes afirmaciones señala cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. En caso de ser falsa explica la razón.

13. A la trayectoria del movimiento circular uniforme se le llama elongación.

14. Si en un resorte se duplica la deformación, entonces la fuerza recuperadora se duplica.

15.En un M.A.S. la velocidad es máxima en los puntos de retorno porque en ese punto la fuerza recuperadora es máxima.

16. La aceleración en un M.A.S. siempre tiene sentido contrario a la elongación porque la aceleración tiene el mismo sentido de la fuerza recuperadora.

17. En un M.A.S. la aceleración es máxima en los puntos de retorno porque la fuerza recuperadora en máxima.

18. En un M.A.S. el período depende de la amplitud porque a mayor amplitud mayor velocidad adquiere el cuerpo.

19.Cuando la elongación es máxima la velocidad en el M.A.S. es cero.

20. En un disco que gira con M.C.U. los puntos del extremo tienen mayor velocidad angular porque el radio es mayor.

21. En una bicicleta que tiene ruedas de diferentes radio, tendrá mayor velocidad la rueda de mayor radio.

22. En un M.C.U. período es el número de vueltas que realiza un cuerpo en una unidad de tiempo.

C. Tercera Parte. Problemas

Resuelve cada uno de los problemas siguientes:

23. Dos poleas de 0,15 m y 0,2 m de radio respectivamente, giran conectadas por una banda. Si la frecuencia de la polea de menor radio es de 12 s^{-1}, calcular la frecuencia de la polea de radio mayor.

R: 9 s^{-1}

24. Un satélite artificial de la tierra está a 200 Km por encima de la superficie terrestre, girando con una aceleración centrípeta de $3{,}8.10^{-4}$ m/s^2. Calcular: a) el período de rotación; b) la velocidad lineal (el radio de la tierra es 6370 Km).

R: a) $8{,}25.10^5$ s; b) 49,96 m/s.

25. Se tiene un cuerpo de masa 8 g que se mueve con un M.A.S. de amplitud 24 cm y período 4 s. Si la elongación es + 24 cm cuando t = 0,5 s, calcular: a) la posición del cuerpo en el instante t = 0,5 s; b) la magnitud de la fuerza que actúa sobre el cuerpo, cuando t = 0,5 s; c) el tiempo mínimo necesario para que el cuerpo se mueva desde la posición de equilibrio hasta x = -12 cm.

R: a) 23,99 cm; b) 0,47 N; c) 1,33 s.

26. Un péndulo simple de 2,4 cm de longitud oscila con una velocidad de 20 cm. Calcular: a) la velocidad del péndulo en el punto más bajo; b) la aceleración en los extremos de la trayectoria.

R: a) 0,4 m/s; b) 0,88 m/s.

UNIDAD III

LAS INTERACCIONES

- Interacciones.
- Fuerza normal. Tensión. Fuerza de roce. Medición de fuerza.
- Tercera Ley de Newton.
- Operaciones vectoriales con fuerza (plano)
- Ley de gravitación universal. Valor de g.
- Ley de Coulomb.
- Fuerza. Movimiento.
- Primera Ley de Newton.
- Segunda Ley de Newton.
- Masa de un cuerpo.
- Estudio de cuerpos bajo la acción de fuerzas prefijadas. Problemas.
- Principio de conservación de la cantidad de movimiento.
- Centro de masa.
- Problemas propuestos.
- Autoevaluación.

UNIDAD 3

LAS INTERACCIONES

3.1 Las interacciones

Todos los objetos físicos del universo están en una constante atracción y/o repulsión. Así, por ejemplo:

-Si se suelta un cuerpo, éste es atraído por la tierra.

-Cuando acercamos un imán o un clavo, éste es atraído por el imán.

-Si aplicamos una fuerza a un resorte, éste se deforma por la acción de dicha fuerza.

-Si frotamos un peine de plástico con un paño de lana y es acercado a pequeños papelitos, éstos son atraídos por el peine.

Como puede notarse en los ejemplos, estamos en presencia de un conjunto de objetos físicos sobre los cuales se llevan a cabo acciones mutuas. Ellos están interaccionando.

De acuerdo a estas observaciones podemos definir que las **interacciones son las influencias o acciones mutuas que ejercen los cuerpos entre sí.**

Clasificación de las interacciones.

Si bien es cierto que existen varios tipos de interacciones, no es menos cierto que muchas de ellas están enmarcadas dentro de tres grandes tipos. Estas interacciones son las **gravitatorias**, las **electromagnéticas** y las **nucleares**. Esta clasificación atiende a su origen, intensidad y distancia de la actuación de la fuerza.

* **Las interacciones gravitatorias** tienen su origen en una propiedad de los cuerpos como lo es su masa, entendiéndose a ésta como la medida de la cantidad de materia que posee un cuerpo.

Las fuerzas actuantes en este caso se llaman **fuerzas gravitatorias** y los cuerpos a pesar de las distancias grandes que los separan siempre estarán interactuando gravitatoriamente.

Esta interacción presenta carácter universal, ya que se manifiesta sin excepción entre todas las partículas de acuerdo con su masa.

* **Las interacciones electromagnéticas** se deben también a una propiedad de los cuerpos atribuida a ellos que se denominan **carga eléctrica**. Esta propiedad, como vimos en el noveno grado, está caracterizada por el exceso o déficit de cargas negativas que posee un cuerpo. Estas interacciones actúan a distancias más cortas que las gravitacionales, pero se distinguen de éstas porque la magnitud de la fuerza es mayor.

Las fuerzas actuantes se llaman **fuerzas electrostáticas** si las cargas están en reposo, pero cuando éstas se ponen en movimiento estamos en presencia de **fuerzas electromagnéticas.**

* **Las interacciones nucleares** son aquellas que aparecen únicamente en el interior del núcleo atómico, originando fuerzas de gran intensidad, donde la distancia entre los cuerpos que interactúan es del orden 10-15 m. Cuando esta distancia aumenta, las fuerzas desaparecen.

Dentro de las interacciones que se llevan a cabo en el núcleo es necesario distinguir entre **la interacción fuerte y la interacción débil.**

La interacción fuerte es de corto alcance, siendo la responsable de la ligadura de protones y neutrones en el núcleo, estando éstos constituidos por partículas más pequeñas que reciben el nombre de **quarks**. Estos no pueden liberarse y están asociados a otros sistemas de **quarks.**

La interacción débil es de corto alcance y tiene la tendencia a producir inestabilidades en ciertos núcleos, siendo la responsable de la mayoría de los procesos de decaimiento radiactivo, tales como la desintegración beta (ß). Esta última no es más que un proceso en el cual se expulsa un electrón con alta energía. Las diferencias que pueden notarse entre los tres tipos de interacciones radica en los siguientes aspectos:

* Las fuerzas electromagnéticas y gravitatorias decrecen con el inverso cuadrado de la distancia

entre las partículas que interactúan, existiendo siempre una fuerza aunque sea muy débil.

* Las interacciones nucleares aparecen únicamente en el momento en que las partículas se encuentren muy próximas, desapareciendo cuando se separen.

* Las fuerzas electromagnéticas pueden ser repulsivas y atractivas, en cambio las gravitatorias son únicamente atractivas.

3.2 Fuerza normal. Tensión. Fuerza de roce. Medición de fuerza.

Introducción. Concepto de fuerza.

Las primeras ideas de fuerza que poseemos, las obtenemos a través de las sensaciones de esfuerzo muscular que hacemos para deformar cuerpos elásticos o para acelerar un objeto.

Pensemos e imaginemos sobre los siguientes aspectos:

* Cuando acercamos un imán a un clavo, éste inicia un movimiento (efecto) al ser atraído por una fuerza magnética (causa).

* Si de un resorte colgamos una pesa, ésta le produce al resorte una deformación (efecto), porque ella es atraída por su propio peso debido a la fuerza de gravedad (causa).

* Si una esfera de plastilina la apretamos con los dedos (causa), notaremos que la esfera se deforma (efecto).

Como podemos notar en todos los casos analizados, existe una relación de causa - efecto. En los dos primeros casos las fuerzas magnéticas, musculares y gravitatorias (causas) originan un movimiento y una deformación (efectos).

En el caso de la esfera, una fuerza muscular (causa) origina una deformación (efecto).

De acuerdo a lo analizado podemos decir:

Una fuerza es toda causa capaz de originar dos clases de efectos:

* Efecto dinámico: **produciendo o modificando el movimiento de un cuerpo.**

* **Efecto deformador:** cambiando la forma de los cuerpos.

Carácter vectorial de la fuerza.

Para que el efecto de una fuerza quede bien definido es necesario especificar tres elementos claves: **magnitud, punto de aplicación, dirección y sentido.** Esta es la razón por la cual la fuerza, cualquiera que sea su naturaleza, se dice que tiene carácter vectorial y como tal puede ser representada a través de vectores. Pueden sumarse, restarse y descomponerse.

Representación gráfica de las interacciones gravitatorias.

Consideremos dos masas m_1 y m_2 ubicadas sobre una misma recta de acción, como las representadas en la figura 3.1(a). Recordemos que las fuerzas gravitatorias son únicamente atractivas.

La fuerza con que la masa m_2 atrae a la masa m_1 la representamos como F_{21} y la fuerza con que la masa m_1 atrae a la masa m_2 la representaremos como F_{12}.

Figura 3.1(a)

Consideremos ahora tres masas ubicadas en los vértices del triángulo de la figura. 3.1(b).

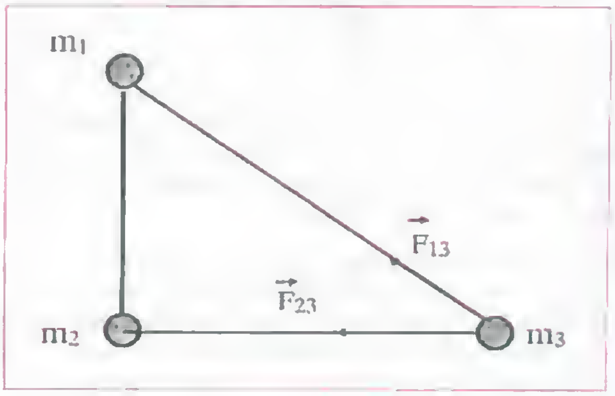


Figura 3.1(b)

Representemos las fuerzas de atracción con que las masas m_1 y m_2 actúan sobre la masa m_3.

La masa m_1 atrae a la masa m_3 con una fuerza que denotaremos como F_{13} y la masa m_2 atrae a la masa m_3 con una fuerza que denotaremos como F_{23}

Representación gráfica de las interacciones eléctricas.

Consideremos dos cargas eléctricas positivas, ubicadas en los extremos de una recta, tal como lo muestra la figura 3.2(a). Recordemos que dos cargas del mismo signo se repelen; en cambio dos cargas de signos opuestos se atraen.

Figura. 3.2(a)

La fuerza con que la carga Q_2 repele a la carga Q_1 la representaremos como F_{21} y la fuerza con que la carga Q_1 repele a la carga Q_2 la representaremos como F_{12}.

En la figura 3.2(b) se muestran dos cargas de signos opuestos, F_{12} representa la fuerza con que la carga Q_1 atrae a la carga Q_2. F_{21} representa la fuerza con que la carga Q_2 atrae a la carga Q_1.

Figura 3.2(b)

En el triángulo de la figura 3.3 se muestran las fuerzas con que las cargas Q_1 y Q_2 repelen a la carga Q_3.

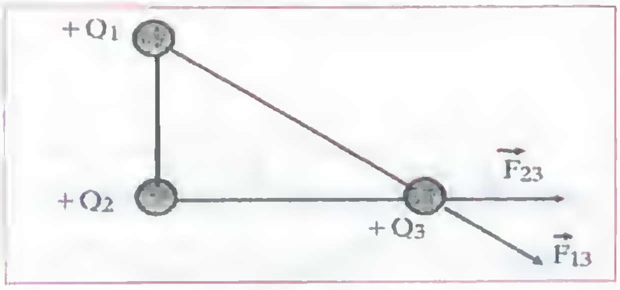


Figura 3.3

Fuerzas mecánicas especiales

Peso de un cuerpo

Sabemos que entre los cuerpos y la tierra existe una interacción gravitacional, la cual se pone de manifiesto cuando los primeros, al faltarles apoyo o suspensión son aceleradas hacia la tierra por la acción de su propio peso.

Si entendemos que el peso es un caso particular de la fuerza. Puede decirse que:

El peso de un cuerpo es la fuerza con que él es atraído por la tierra.

La aceleración adquirida por el cuerpo en su caída es la **aceleración de la gravedad (g)**, la cual es una magnitud vectorial dirigida verticalmente hacia abajo.

El peso (**P**) es también una magnitud vectorial que tiene dirección vertical y sentido hacia abajo, como lo indican las figuras 3.4; 3.5 y 3.6.

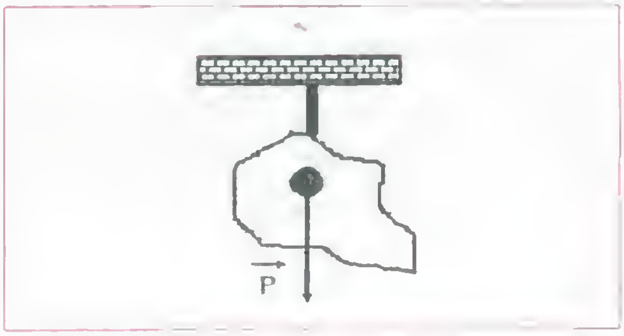


Figura. 3.4

En noveno grado estudiamos la segunda Ley de Newton y vimos que: ($F = m \cdot a$). Si aplicamos esta ley al cuerpo en caída libre, con **a** $=$ **g** y **F** $=$ **P** puede escribirse que:

$$P = m \cdot g$$

En la figura 3.5 se muestra el vector **P** representativo del peso en un cuerpo apoyado sobre un plano horizontal.

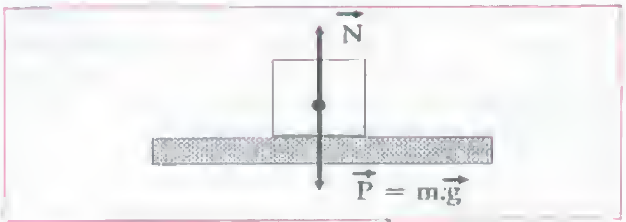


Figura. 3.5

En la figura 3.6 se muestra el vector **P** representativo del peso de un cuerpo apoyado sobre un plano inclinado.

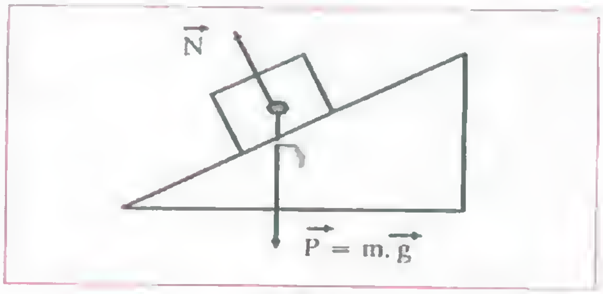


Figura. 3.6

Fuerzas elásticas

Se entiende por **elasticidad** a la propiedad que poseen los cuerpos de recuperar su forma original una vez deformados por el efecto de una fuerza externa. Todos los cuerpos en mayor o menor grado son elásticos, dependiendo dicha elasticidad de factores tales como la estructura molecular interna y la fuerza exterior que se aplique.

A las fuerzas de restauración, originadas en la parte interna del material, que tienden a regresar el cuerpo a su posición original y que están aplicadas sobre el cuerpo que origina la deformación se llaman **fuerzas elásticas**.

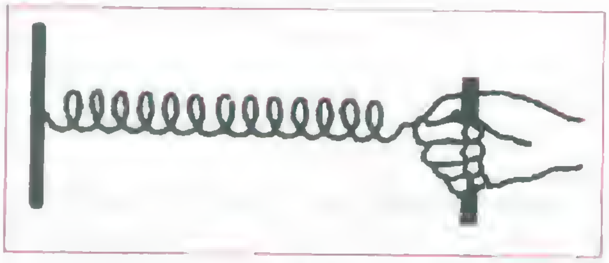


Figura. 3.7

Consideremos un cuerpo elástico, tal como un resorte o muelle como el mostrado en la figura 3.7. Si dicho resorte está fijo en un extremo y por el extremo libre ejercemos una fuerza (acción), aparecerá una reacción que el resorte ejerce sobre nuestra mano, con una fuerza dirigida en sentido opuesto a la deformación y su valor depende del alargamiento sufrido por el resorte. Esta fuerza se llama **fuerza elástica recuperadora**.

Esta fuerza puede ser calculada a través de la ley de Hooke, la cual puede ser enunciada así:

las fuerzas aplicadas sobre un cuerpo elástico son siempre proporcionales a las deformaciones que producen, mientras no se alcance el límite de elasticidad del material.

La ecuación viene dada por:

$$F = -k \cdot x$$

x: es la deformación.

F: fuerza de restitución

k: constante de elasticidad

El signo menos indica que la fuerza proporcional al desplazamiento siempre es de sentido opuesto a él.

La fuerza normal

Cuando un cuerpo está colocado sobre un plano horizontal, tal como se observa en la figura 3.5, el cuerpo ejerce sobre el plano una fuerza que comprime las moléculas de la superficie del plano en contacto, deformándolo. A su vez, la superficie del plano trata de recuperar su estado original a través de las fuerzas elásticas, que en este caso se les llama **fuerzas de contacto normal.** La dirección de esta fuerza es perpendicular a las superficies en contacto, razón por la cual se le llama **normal** y se ejerce sobre el objeto causante de la deformación, denotándose con la letra (N).

En las figuras 3.5 y 3.6 la normal está representada por **N**. Nótese que la normal es perpendicular al plano donde está apoyado el cuerpo.

En general podemos definir:

La fuerza normal entre dos superficies en contacto es la fuerza perpendicular que la superficie soporte ejerce sobre la superficie que se encuentra sobre ella.

Fuerza de tensión

Es la fuerza ejercida por una cuerda, considerada de masa despreciable e inextensible, sobre un cuerpo que está ligado a ella.

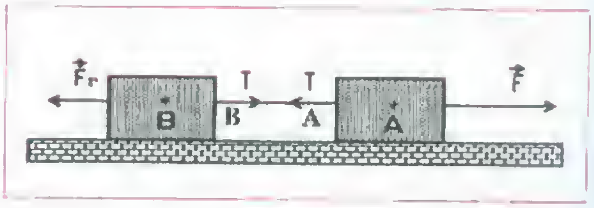


Figura 3.8

Consideremos dos cuerpos A y B, unidos a través de una cuerda, como lo indica la figura 3.8.

Al aplicar la fuerza **F** se observa que en A aparece una tensión T dirigida de A hacia B. En B aparece la misma tensión **T** originada por las moléculas de la cuerda y dirigida de B hacia A. En realidad esta tensión es la misma.

En la figura 3.9 se muestra un cuerpo que cuelga fijo desde un punto. El peso **P** está dirigido hacia abajo y la tensión **T** aparece dirigida hacia arriba en sentido opuesto.

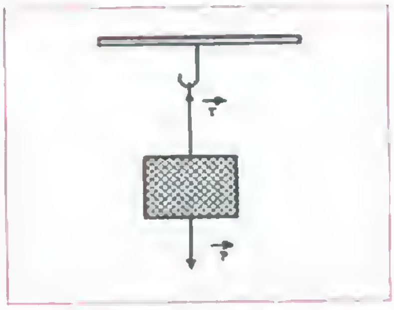


Figura. 3.9

Fuerzas de fricción y coeficientes de rozamiento.

Las fuerzas de fricción o roce son fuerzas que se originan en la superficie de contacto entre dos cuerpos.

Son conocidas dos tipos de fricción: la **fricción estática** y la **fricción cinética**

Para comprender mejor estos aspectos observemos la figura 3.10, donde se muestra un bloque que está en reposo sobre un plano horizontal. Al aplicar una fuerza externa **F**, de dirección horizontal y sentido hacia la derecha, notamos que el bloque no se pone en movimiento. Esto es debido a otra fuerza de sentido opuesto que equilibra a la fuerza aplicada y que recibe el nombre de **fuerza de fricción estática (fs)**.

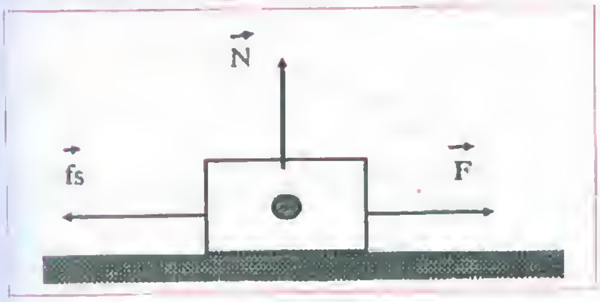


Figura. 3.10

Si aplicamos una fuerza aún mayor que la anterior, figura 3.11(a), y no logramos poner el bloque en movimiento, es porque la fuerza equilibrante de fricción estática también irá aumentado.

Si se continua aumentando la fuerza F, llegará un momento en que la fuerza de fricción estática alcance su valor máximo $f_{s(máx)}$ y el bloque esté a punto de ponerse en movimiento.

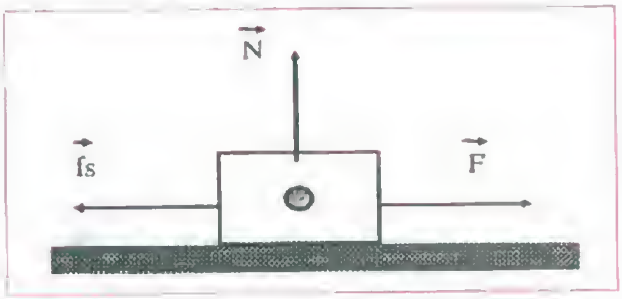


Figura. 3.11(a)

Al ponerse en movimiento, figura 3.11(b), la fuerza de fricción retardadora es menor que la fuerza de fricción estática máxima. En este caso a la fuerza retardadora se le conoce como **fuerza de fricción cinética**, la cual notaremos f_k.

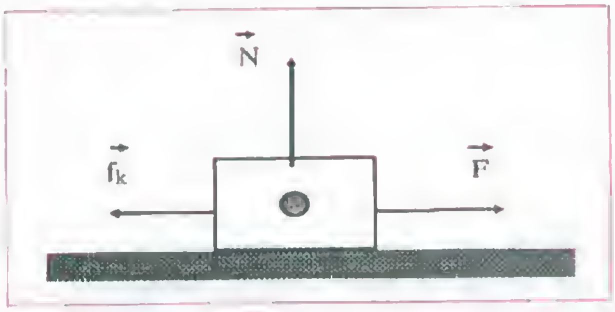


Figura. 3.11(b)

Después de múltiples experimentos se ha podido comprobar que tanto la magnitud de $f_{s(máx)}$ como la magnitud de f_k **son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal N** que actúa sobre el bloque. Las observaciones generales pueden ser resumidas en las siguientes leyes de fricción:

1. La fuerza de fricción estática f_s entre dos superficies cualesquiera que están en contacto es opuesta a la fuerza aplicada y puede tener valores dados por:

$$f_s \leq \mu_s \cdot N$$

μ_s: es el **coeficiente de fricción estática**

N: es la magnitud de la fuerza normal.

La igualdad se puede establecer cuando el bloque esté a punto de deslizarse, pudiéndose escribir que:

$$f_s = f_{s(máx)} = \mu_s . N$$

2. La fuerza de fricción cinética f_k es opuesta a la dirección del movimiento y puede expresarse como:

$$f_k = \mu_k . N$$

μ_k: es el **coeficiente de fricción cinético.**

3. Los valores de μ_s y μ_k dependen de la naturaleza de las superficies, pero independiente del área de contacto. Siempre μ_k será menor que μ_s.

Fuerza de cohesión

Es la fuerza que mantiene unidas a las moléculas de un mismo cuerpo. Esta fuerza hace que los cuerpos adquieran tres estados.

* **Sólido,** cuando la fuerza de cohesión entre sus moléculas es muy grande.

* **Líquido**, cuando la fuerza de cohesión no es muy grande, razón por la cual los líquidos toman la forma del recipiente que los contiene.

* **Gaseoso**, aquí la fuerza de cohesión es casi nula, razón por la cual los gases son volátiles y expansibles.

Fuerza de adhesión

Es la fuerza que mantiene unidas a las moléculas de cuerpos diferentes. La tinta se adhiere al papel cuando escribimos. Cuando se pinta una pared, la pintura se adhiere a ésta.

3.3 Tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton es también llamada **Ley de Acción y Reacción** debido a que cada vez que hay una acción se produce una reacción. Veamos algunos ejemplos:

1. Cuando un pescador que está en una lancha colocada cerca de la orilla (figura. 3.12) y con el remo ejerce una fuerza sobre el muelle (acción), la lancha se mueve (reacción) como si la hubieran empujado desde éste.

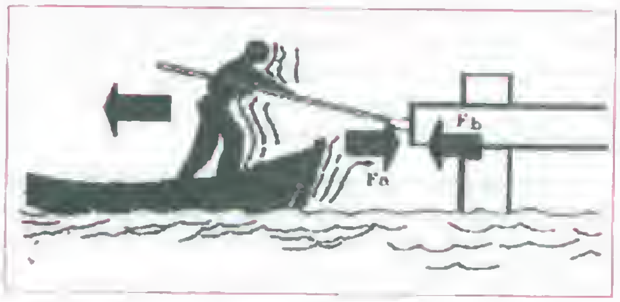


Figura. 3.12

F_a: es la fuerza que el remo aplica al muelle

F_b: es la fuerza que el muelle aplica sobre el remo.

2. Si un cuerpo A está colocado sobre un plano B (fig. 3.13), sobre el cuerpo A actúa el plano B con una fuerza F_a, y el cuerpo A actúa sobre el plano B con una fuerza F_b.

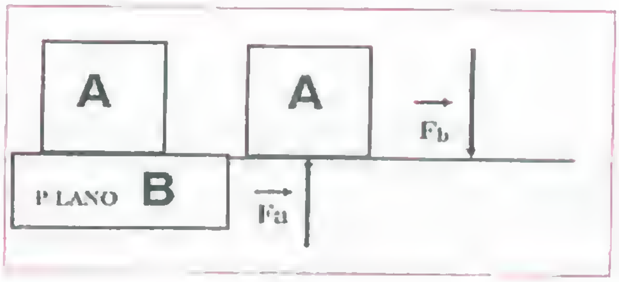


Figura. 3.13

Como podemos notar, si un cuerpo actúa sobre otro, éste actúa sobre el primero. De esta forma puede ser enunciada la tercera ley de Newton así:

La fuerza ejercida por un cuerpo A sobre un cuerpo B es igual en magnitud y dirección pero opuesta en sentido a la que el cuerpo B ejerce sobre A.

Es equivalente a decir que: **las fuerzas siempre se presentan en pares , o bien que no puede existir una fuerza aislada.**

Esta ley puede ser expresada vectorialmente así:

$$\boxed{F_a = - F_b}$$

El signo negativo nos indica que las dos fuerzas son paralelas, pero que actúan en sentidos opuestos.

Es importante hacer destacar que **las fuerzas de acción y reacción actúan sobre cuerpos diferentes y no sobre un mismo cuerpo**. La fuerza que el cuerpo A ejerce sobre el cuerpo B a veces recibe el nombre de fuerza de acción; mientras que la que ejerce el cuerpo B sobre el cuerpo A es conocida como fuerza de reacción.

Diagrama de un cuerpo libre

Un diagrama de cuerpo libre no es más que un diagrama donde se representan a través de vectores todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre él.

Para hacer un diagrama de cuerpo libre se deben adoptar las siguientes etapas:

a) Se debe seleccionar un referencial adecuado fijando el origen y orientando los ejes. El cuerpo debe estar en un sistema de referencia inercial (aquel en el que es válida la primera ley de Newton). Se usa generalmente como origen el punto donde están aplicadas las fuerzas.

b) En sistemas que contengan más de un cuerpo se deben trazar diagramas separados para cada uno de ellos.

Ejemplo 1

Consideremos un cuerpo colocado sobre un plano horizontal, tal como lo muestra la figura 3.14(a), al cual se le está aplicando una fuerza F_t horizontal hacia la derecha.

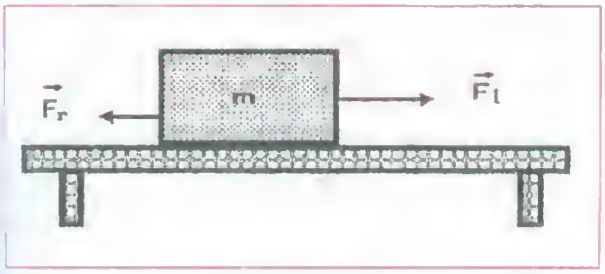


Figura. 3.14(a)

Para hacer el diagrama, seleccionamos los dos ejes "x" e "y", de tal manera que su origen coincida con el punto donde estarán aplicadas las fuerzas, figura 3.14(b).

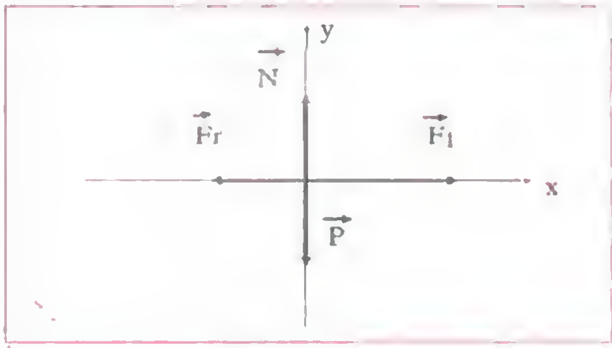


Figura. 3.14(b)

P: Representa el peso del cuerpo que tiene dirección vertical y sentido hacia abajo. Éste queda dibujado sobre el eje "y".

N: Representa la normal, que es la fuerza con que el plano actúa sobre el cuerpo, también dibujado sobre el eje "y" , en dirección vertical y hacia arriba.

Actuando sobre el eje "x" tenemos dos fuerzas:

F_t: fuerza aplicada sobre el cuerpo para moverlo hacia la derecha.

F_r: representa a la fuerza de roce que siempre tendrá sentido opuesto al del movimiento.

Ejemplo 2: En la figura 3.15 se muestran dos bloques A y B unidos a través de una polea.

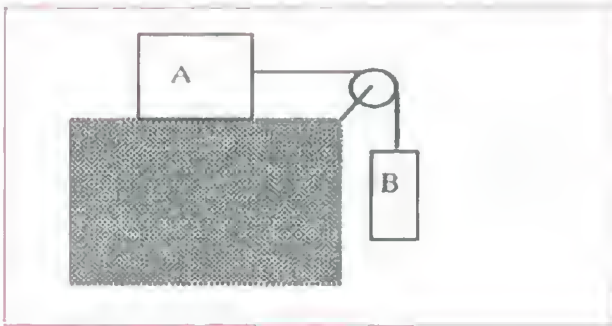


Figura. 3.15

Para hacer un diagrama de cuerpo libre del sistema debemos considerar ejes coordenados en cada cuerpo. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo B están mostradas en la figura 3.16 y son las siguientes:

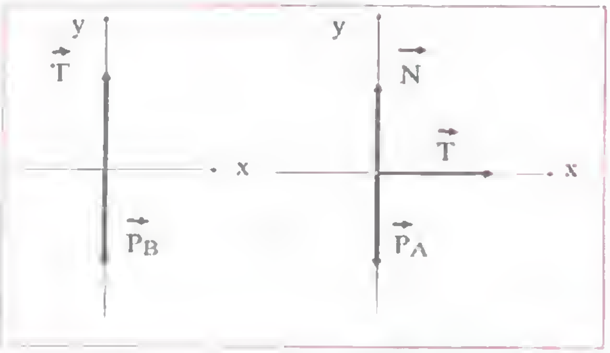


Figura. 3.16 Figura 3.17

- P_B: es el peso del cuerpo, de dirección vertical y sentido hacia abajo.
- T: es la tensión del hilo, de dirección vertical y sentido hacia arriba.

Sobre el cuerpo A (fig. 3.17) se tienen:

- N: la normal, fuerza que ejerce el plano sobre el bloque.
- P_A: el peso de dirección vertical y sentido hacia abajo.
- T: es la fuerza que por reacción ejerce el hilo.

Ejemplo 3:

En la figura 3.18 se muestra un bloque sobre un plano inclinado.

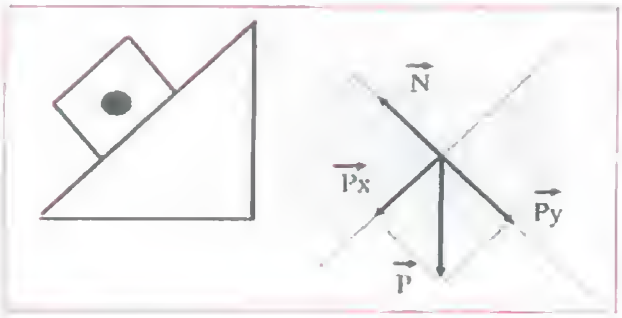


Figura. 3.18 Figura 3.19

Las fuerzas que actúan se muestran en la figura 3.19.

- N: es la normal, fuerza que el plano inclinado ejerce sobre el bloque.
- P: el peso del cuerpo de dirección vertical y sentido hacia abajo.

El peso tiene dos componentes en las direcciones de los ejes.

- P_x: la componente del peso en la dirección del eje "x".
- P_y: la componente del peso en la dirección del eje "y".

Ejercicios propuestos

Haz en tu cuaderno el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los casos planteados en la figura 3.20

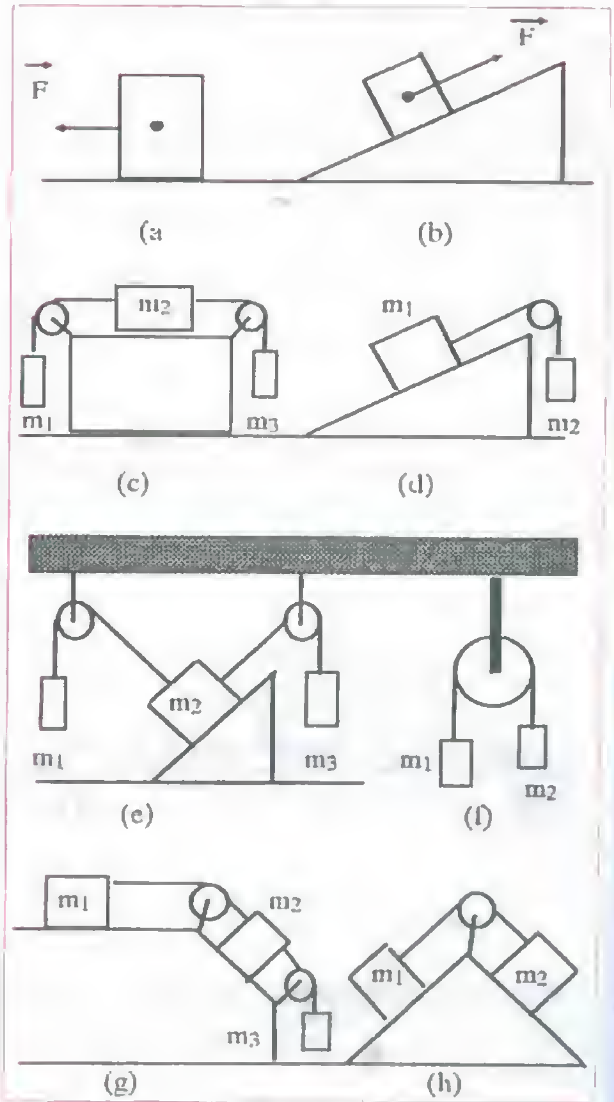


Figura. 3.20

3.4 Operaciones vectoriales con fuerzas.

En algunas oportunidades la regla del paralelogramo, para encontrar la resultante de dos fuerzas es eficiente. No ocurre así cuando actúan más de dos fuerzas, pues, el cálculo resulta embarazoso porque se han de resolver varios triángulos oblicuángulos.

El método de descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares, según las direcciones de los ejes es más cómodo, porque nos bastaría encontrar resultante sobre cada eje para luego componerlas después en una sola resultante. Este proceso nos permite usar solamente triángulos rectángulos.

Problemas resueltos

Problema 1

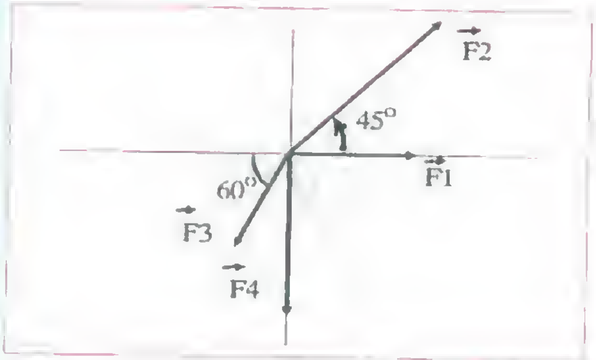


Figura. 3.21(a)

Consideremos cuatro fuerzas de magnitudes $F_1 = 10$ Kp, $F_2 = 20$ Kp, $F_3 = 15$ Kp y $F_4 = 40$ Kp, actuando como lo indica la figura 3.21(a). Encontrar la resultante de todas las fuerzas y su dirección.

Solución:

Proyectemos los vectores fuerza F_2 y F_3 sobre los ejes, figura 3.21(b), obteniéndose F_{2x}, F_{2y}, F_{3x}, F_{3y}. Las fuerzas F_1 y F_4 están coincidiendo sobre los ejes.

Las magnitudes de los componentes sobre los ejes son:

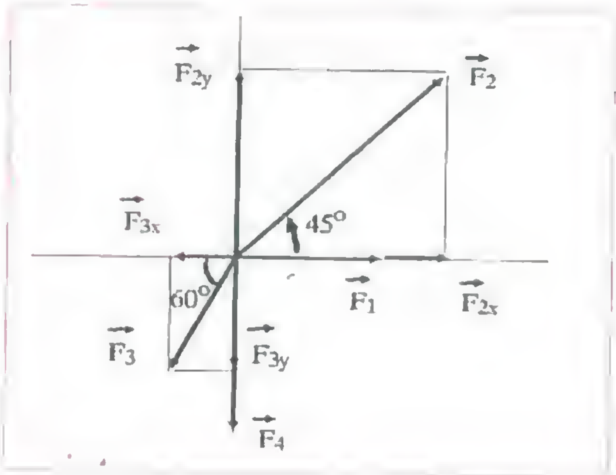


Figura 3.21(b)

Sobre eje "x"

$$F_1 = 10 \text{ Kp}$$
$$F_{2x} = F_2 \,.\, \cos 45^\circ$$
$$F_{2x} = 20 \text{ Kp} \,.\, \cos 45^\circ$$
$$F_{2x} = 14{,}14 \text{ Kp}$$
$$F_{3x} = - F_3 \,.\, \cos 60^\circ$$
$$F_{3x} = - 7{,}5 \text{ Kp}$$
$$F_{4x} = 0$$

$$F_x = F_1 + F_{2x} - F_{3x}$$

$$F_x = 10 \text{ Kp} + 14{,}14 \text{ Kp} - 7{,}5 \text{ Kp}$$

$$F_x = 16{,}64 \text{ Kp}$$

Sobre eje "y"

$$F_{1y} = 0$$
$$F_{2y} = F_2 \,.\, \text{sen } 45^\circ$$
$$F_{2y} = 20 \text{ Kp} \,.\, \text{sen } 45^\circ$$
$$F_{2y} = 14{,}14 \text{ Kp}$$
$$F_{3y} = - F_3 \,.\, \text{sen } 60^\circ$$
$$F_{3y} = - 12{,}99 \text{ Kp}$$
$$F_{4y} = - 40 \text{ Kp}$$

$$F_y = F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}$$

$$F_y = 14{,}14 \text{ Kp} - 12{,}99 \text{ Kp} - 40 \text{ Kp}$$

$$F_y = - 38{,}85 \text{ Kp}$$

3.4 Operaciones vectoriales con fuerzas.

En algunas oportunidades la regla del paralelogramo, para encontrar la resultante de dos fuerzas es eficiente. No ocurre así cuando actúan más de dos fuerzas, pues, el cálculo resulta embarazoso porque se han de resolver varios triángulos oblicuángulos.

El método de descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares, según las direcciones de los ejes es más cómodo, porque nos bastaría encontrar resultante sobre cada eje para luego componerlas después en una sola resultante. Este proceso nos permite usar solamente triángulos rectángulos.

Problemas resueltos

Problema 1

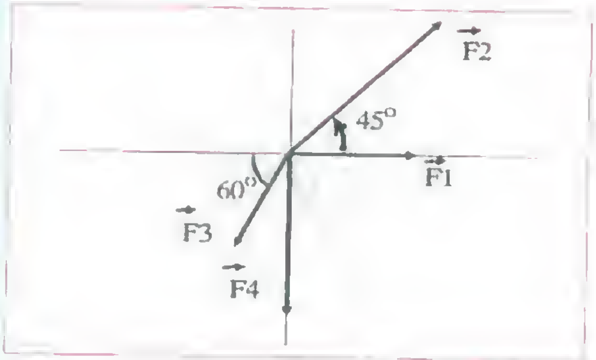


Figura. 3.21(a)

Consideremos cuatro fuerzas de magnitudes $F_1 = 10$ Kp, $F_2 = 20$ Kp, $F_3 = 15$ Kp y $F_4 = 40$ Kp, actuando como lo indica la figura 3.21(a). Encontrar la resultante de todas las fuerzas y su dirección.

Solución:

Proyectemos los vectores fuerza F_2 y F_3 sobre los ejes, figura 3.21(b), obteniéndose F_{2x}, F_{2y}, F_{3x}, F_{3y}. Las fuerzas F_1 y F_4 están coincidiendo sobre los ejes.

Las magnitudes de los componentes sobre los ejes son:

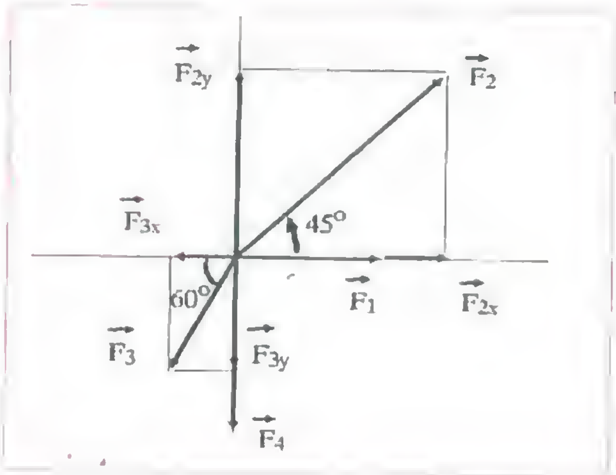


Figura 3.21(b)

Sobre eje "x"

$$\begin{aligned} F_1 &= 10 \text{ Kp} \\ F_{2x} &= F_2 \cdot \cos 45^\circ \\ F_{2x} &= 20 \text{ Kp} \cdot \cos 45^\circ \\ F_{2x} &= 14{,}14 \text{ Kp} \\ F_{3x} &= - F_3 \cdot \cos 60^\circ \\ F_{3x} &= - 7{,}5 \text{ Kp} \\ F_{4x} &= 0 \end{aligned}$$

$$F_x = F_1 + F_{2x} - F_{3x}$$

$$F_x = 10 \text{ Kp} + 14{,}14 \text{ Kp} - 7{,}5 \text{ Kp}$$

$$F_x = 16{,}64 \text{ Kp}$$

Sobre eje "y"

$$\begin{aligned} F_{1y} &= 0 \\ F_{2y} &= F_2 \cdot \text{sen } 45^\circ \\ F_{2y} &= 20 \text{ Kp} \cdot \text{sen } 45^\circ \\ F_{2y} &= 14{,}14 \text{ Kp} \\ F_{3y} &= - F_3 \cdot \text{sen } 60^\circ \\ F_{3y} &= - 12{,}99 \text{ Kp} \\ F_{4y} &= - 40 \text{ Kp} \end{aligned}$$

$$F_y = F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}$$

$$F_y = 14{,}14 \text{ Kp} - 12{,}99 \text{ Kp} - 40 \text{ Kp}$$

$$F_y = - 38{,}85 \text{ Kp}$$

La figura 3.21(c) muestra el diagrama de los vectores obtenidos. La magnitud de F viene dada por:

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$$

$$F = \sqrt{(16{,}64\ Kp)^2 + (-38{,}85\ Kp)^2}$$

$$F = 42{,}26\ Kp$$

La dirección de F viene dada así:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-38{,}85}{16{,}64}$$

$$\theta = -66^0\ 48'\ 50''$$

Luego la dirección de la resultante estará en 66° 48' 50", por debajo del eje "x" en sentido opuesto.

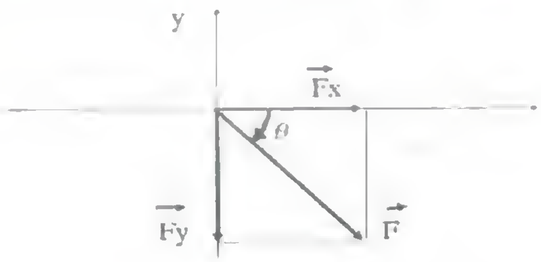


Figura. 3.21(c)

Problema 2

Tres fuerzas están aplicadas sobre un mismo punto, actuando de la manera siguiente: $F_1 = 200$ N formando un ángulo de 30^0 por encima del eje x; $F_2 = 300$ N formando un ángulo de 45^0 al norte del oeste y $F_3 = 155$ N formando un ángulo de 55^0 al sur del oeste. Calcular la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

Solución.

El diagrama de las condiciones del problema lo observamos en la figura. 3.22(a)

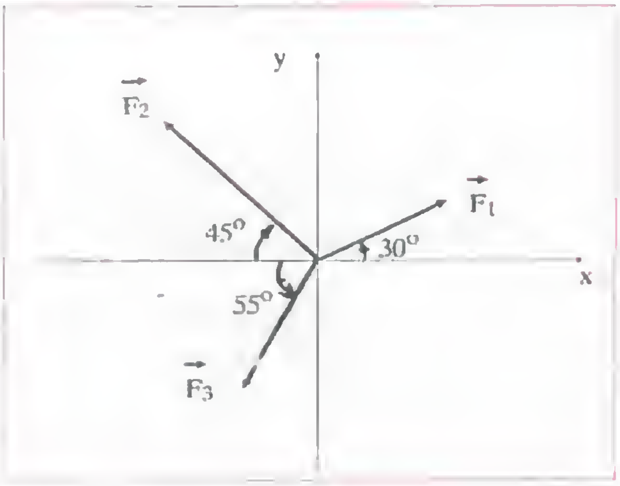


Figura. 3.22(a)

Si proyectamos cada uno de los vectores fuerzas sobre los ejes obtenemos la figura. 3.22(b)

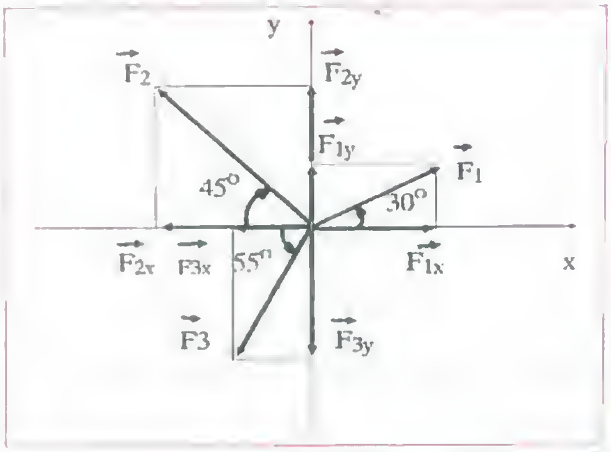


Figura. 3.22(b)

Las magnitudes de las componentes sobre los ejes son:

Sobre el eje "x"

$$F_{1x} = F_1.\cos 30^0$$
$$F_{1x} = 200\ N.\cos 30^0$$
$$F_{1x} = 173{,}2\ N$$

$$F_{2x} = -F_2.\cos 45^0$$
$$F_{2x} = -300\ N.\cos 45^0$$

$F_{2x} = -212{,}1\ N$

$F_{3x} = -F_3 . \cos 55^o$
$F_{3x} = -155\ N . \cos 55^o$
$F_{3x} = -\ 88{,}9\ N$

La resultante sobre el eje "x" será:

$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$
$F_x = 173{,}2\ N - 212{,}1\ N - 88{,}9\ N$
$F_x = -127{,}8\ N$

Sobre el eje "y"

$F_{1y} = F_1 . \text{sen } 30^o$
$F_{1y} = 200\ N . \text{sen } 30^o$
$F_{1y} = 100\ N$

$F_{2y} = F_2 . \text{sen } 45^o$
$F_{2y} = -300\ N . \text{sen } 45^o$
$F_{2y} = 212{,}1\ N$

$F_{3y} = -F_3 . \text{sen } 55^o$
$F_{3y} = -155\ N . \text{sen } 55^o$
$F_{3y} = -126{,}9\ N$

La resultante sobre el eje "y" será:

$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$
$F_y = 100\ N + 212{,}1\ N - 126{,}9\ N$
$F_y = 185{,}2\ N$

La magnitud de la fuerza resultante viene dada por:

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$$

$$F = \sqrt{(-127{,}8\ N)^2 + (185{,}2\ N)^2}$$

$$\boxed{F = 225{,}01\ N}$$

La fuerza "F" resultante se muestra en la fig. 3.22(c)

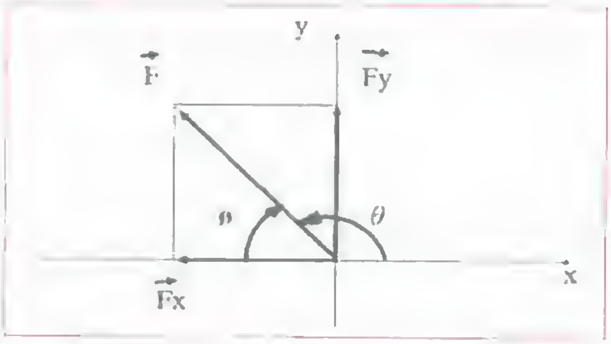


Figura. 3.22(c)

Para obtener la dirección de "F" procedemos así:

$$\text{tag } \text{ø} = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\text{tag } \text{ø} = \frac{185{,}2\ N}{127{,}8\ N}$$

$$\boxed{\text{ø} = 55^o\ 23'\ 31''}$$

La dirección de "F" es el ángulo θ que se señala en la figura 3.22(c)

$$\theta = 180^o - 55^o\ 23'\ 31''$$

$$\boxed{\theta = 124^o\ 36'\ 29''}$$

Problemas propuestos.

1. Dos fuerzas actúan en un punto. El valor de una de ellas es 8 Kp y su dirección forma un ángulo de 60° por encima de la horizontal y hacia la derecha. El valor de la otra fuerza es de 5 Kp y forma un ángulo de 53° por debajo de la horizontal y en el cuarto cuadrante. Calcular: a) las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante; b) el valor de la resultante.

R: a) 7 Kp; 2,9 Kp; b) 7,6 Kp.

2. Dos personas A y B halan de dos cuerdas atadas a un poste, las cuales forman entre sí un

ángulo de 45°. "A" ejerce una fuerza de 75 Kp y "B" 50 Kp. Hallar el valor de la resultante y el ángulo que forma con la fuerza ejercida por "A".

R: 115,7 Kp; 17° 47'.

3. Determinar la magnitud de la resultante de dos fuerzas concurrentes de 15 Kp y 40 Kp respectivamente, cuyas rectas de acción forman entre sí un ángulo de 60°. ¿Qué ángulos forma la resultante con las componentes?.

R: 48,4 Kp; 15° 20"; 44° 40" .

4. Hallar la resultante del siguiente conjunto de fuerzas y el ángulo que forma con la horizontal hacia la derecha: F_1 = 200 Kp, ubicada sobre el eje x en dirección este, F_2 = 300 Kp formando un ángulo de 60° con la dirección positiva del eje x, F_3 = 100 Kp formando un ángulo de 45° con la dirección negativa del eje x; y F_4 = 200 Kp ubicada sobre el eje vertical en la dirección negativa.

R: 308,7 Kp y 25° 2' 38".

5. Hallar la magnitud de la fuerza resultante y su dirección en cada uno de los sistemas de fuerzas dados a continuación:

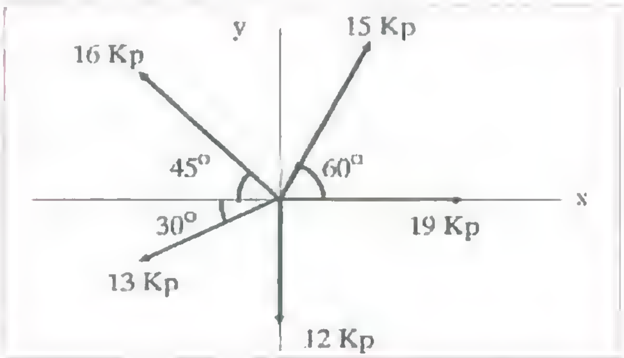


Figura. 3.23

R: 7,01 Kp y 55°

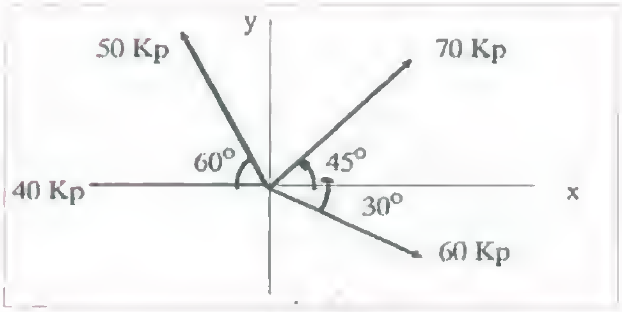


Figura. 3.24

R: 72,6 Kp ; 59° 52'.

6. Hallar la resultante del siguiente sistema de fuerzas: F_1 = 150 Kp en el primer cuadrante, formando un ángulo de 62° con la dirección positiva del eje x; F_2 = 180 Kp hacia el sur-este, formando 23° por debajo del eje x; F_3 = 130 Kp en la dirección sur; F_4 = 125 Kp en el tercer cuadrante, formando 25° con la dirección negativa del eje x.

R: 172,2 Kp; 315° 29' 21,7"

7. Hallar la resultante del siguiente sistema de fuerzas coplanarias y concurrentes: 20 Kp; 40 Kp; 25 Kp; 42 Kp y 12 Kp, formando ángulos de: 30°; 120°; 180°; 270° y 315° respectivamente, con la dirección positiva del eje "x".

R: 20 Kp ; 197°.

Auto evaluación

A. Primera parte. Selección.

A continuación se proponen varias afirmaciones con cuatro alternativas cada una. Selecciona la alternativa correcta y escríbela en tu cuaderno.

1. Las fuerzas de acción y reacción:
a) Son aspectos parciales de una interacción.
b) No originan movimiento.
c) Actúan simultáneamente.
d) Están aplicadas sobre cuerpos diferentes.

2. Sobre un cuerpo, apoyado sobre una superficie horizontal, actúan dos fuerzas: la normal y el peso. Ellas son:
a) De igual magnitud y sentido
b) Perpendiculares entre sí
c) De igual magnitud y sentidos opuestos
d) De diferente magnitud y sentidos opuestos.

3. La fuerza normal es:
a) Opuesta a la dirección de movimiento
b) De la misma dirección del movimiento
c) Perpendicular al plano del movimiento
d) De la misma magnitud de la fuerza de roce.

4. Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas de 12 N y 5 N, formando entre sí un ángulo de 90°. El módulo de la fuerza resultante que actúa sobre él es:
a) 7 N .
b) 17 N.
c) 60 N .
d) 13 N.

5. En el plano inclinado, cuando un cuerpo está apoyado sobre él, la dirección del vector peso del cuerpo es:
a) Perpendicular al plano inclinado
b) Paralelo al plano inclinado
c) Perpendicular al plano horizontal
d) De sentido opuesto a la normal.

6. Las interacciones eléctricas son:
a) Unicamente atractivas
b) Unicamente repulsivas
c) Atractivas y repulsivas
d) Ninguna de las anteriores.

7. La fuerza se dice que tiene carácter vectorial porque tiene:
a) Magnitud diferente de cero
b) Módulo y dirección
c) Módulo, dirección y sentido
d) Unicamente dirección.

8. La dirección de la fuerza de roce es:
a) Perpendicular a la superficie de contacto
b) Paralela a la superficie de contacto
c) Paralela a la dirección de la normal
d) Perpendicular a la dirección del desplazamiento.

9. La fuerza que mantiene unidas a las moléculas de un mismo cuerpo se llama:
a) Cohesión.
b) Adhesión .
c) Fricción.
d) Reacción.

10. El signo menos en la ley de Hooke significa que:
a) La fuerza restauradora actúa en sentido opuesto a la aplicada
b) La fuerza proporcional al desplazamiento es de sentido opuesto a él
c) Las moléculas del cuerpo elástico se mueven
d) Ninguna de las anteriores.

B. Segunda parte. Verdadero-Falso.

A continuación se te dan afirmaciones entre falsas y verdaderas. Señala cuáles son falsas y cuáles son verdaderas. En caso de ser falsa explica por qué.

11. El movimiento de un cuerpo será siempre en la dirección que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él.

12. En un momento determinado, la tensión de una cuerda debe tener la misma magnitud en dos puntos cualesquiera.

13. La fuerza normal y el peso del cuerpo son siempre de magnitudes diferentes.

14. La fuerza de roce y la normal actúan en la misma dirección.

15. La magnitud de la fuerza de roce es proporcional a la magnitud de la fuerza normal.

16. La fuerza de roce es independiente de la naturaleza de las superficies en contacto.

17. Las fuerzas de acción y reacción de la tercera ley de Newton producen equilibrio.

18. La fuerza ejercida por un resorte que se deforma cierta longitud, es directamente proporcional a la constante de elasticidad.

C. Tercera parte. Problemas.

Resuelve los siguientes problemas.

19. En la fig. 3.25 la magnitud de $F_2 = 16$ N. ¿Qué valores deben tener F_1 y F_3 para que la resultante sea igual a cero?.

R: 20 N ; 12 N

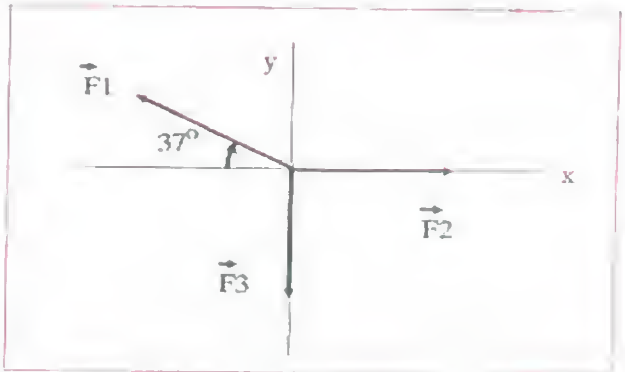


Figura. 3.25

20. En la figura 3.26 la resultante de N, F y P es igual a cero, Si P = 10 N, ¿qué valores deben tener N y F para que se cumpla lo anterior?.

R: 6 N ; 8 N.

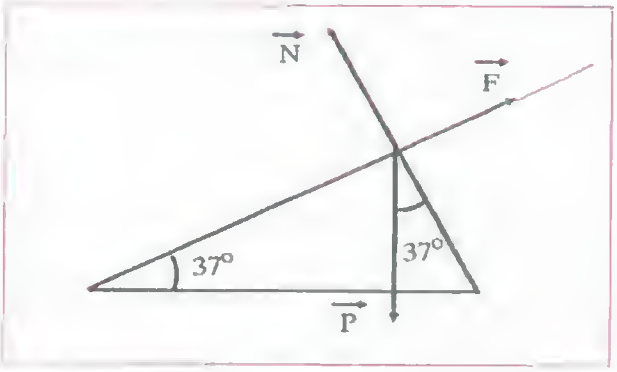


Figura. 3.26

21. En la figura 3.27 se muestran varias fuerzas, de magnitudes $F_1 = 20$ Kp; $F_2 = 18$ Kp; $F_3 = 24$ Kp; $F_4 = 16$ Kp y $F_5 = 16$ Kp. Calcular la magnitud de la fuerza resultante y la dirección.

R: 4,224 Kp- 237° 10' 4"

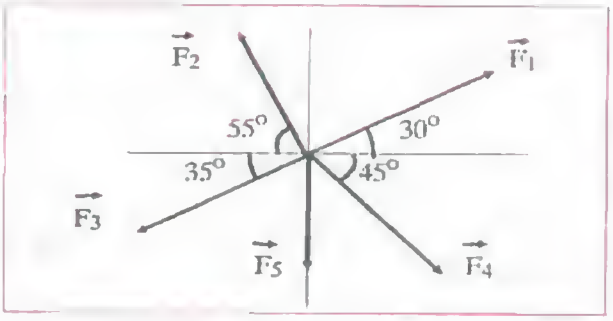


Figura. 3.27

3.5 Ley de gravitación universal. Valor de g.

Introducción

Desde la más remota antigüedad, el hombre se ha sentido atraído por el comportamiento de los astros y ha tratado de buscarle explicación. Así, desde la época de los griegos, pasando por Tolomeo y Copérnico con su sistema heliocéntrico se fue evolucionando hasta llegar a la época de Tycho Brahe, el cual hizo mediciones más precisas de las posiciones de los cuerpos celestes.

Partiendo de los datos cuidadosamente seleccionados por Brahe, el astrónomo Johannes Kepler enunció sus famosas leyes, conocidas hoy como **leyes de Kepler**. Estas leyes fueron enunciadas así:

*** Primera Ley:**

Todo planeta gira alrededor del sol describiendo una órbita elíptica en la cual el sol ocupa uno de los focos.

*** Segunda ley:**

El radio focal que une a un planeta con el sol describe áreas iguales en tiempos iguales.

*** Tercera ley:**

Para todos los planetas, la relación entre el cubo del radio de la órbita y el cuadrado de su período es constante, pudiéndose escribir que:

$$\frac{R^3}{T^2} = K$$

Kepler había pretendido darle explicación a las causas de las leyes que rigen el movimiento de los planetas, pero fue Newton quien le dio solución dinámica al problema del movimiento de los planetas con su Ley de Gravitación Universal.

Newton, basándose en las leyes de Kepler y en las leyes de la mecánica, llegó a la deducción de la fórmula de la Ley de Gravitación Universal.

Deducción de la Ley de Gravitación Universal.

Si se considera que los planetas se mueven en órbitas circulares, la aceleración centrípeta de cualquier planeta se puede calcular por la fórmula:

$$a_c = \omega^2 . R$$

Como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ nos queda que:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} . R \quad \text{.......................................} (1)$$

Sabemos por la tercera ley de Kepler, que:

$$\frac{R^3}{T^2} = K, \qquad \text{de donde}$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{K}{R^3} \quad \text{.......................................} (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que:

$$a_c = \frac{4\pi^2 . K}{R} \quad \text{.......................................} (3)$$

Esto significa que la aceleración de cualquier planeta es independiente de su masa e inversamente proporcional al cuadrado del radio de su órbita.

Por la segunda ley de Newton la fuerza que le imprime al planeta esta aceleración, es:

$$F = m.a_c = m.\frac{4\pi^2 . K}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Es decir, la fuerza que actúa sobre cualquier planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de éste al sol.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza con que el sol actúa sobre el planeta es de la misma magnitud y de sentido opuesto a la fuerza con que el planeta actúa sobre el sol. Si M es la masa del sol, esta última fuerza puede escribirse como:

$$F' = M . \frac{4\pi^2 . K'}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Como F = F', podemos igualar (4) y (5)

$$m . \frac{4\pi^2 . K}{R^2} = M . \frac{4\pi^2 K'}{R^2} \quad \text{quedándonos que:}$$

$$\frac{4\pi^2 . K}{M} = \frac{4\pi^2 . K'}{m} = G$$

donde G es la **constante gravitacional**, y por consiguiente:

$$4\pi^2 . K = G.M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Sustituyendo (6) en (4), nos queda que:

$$\boxed{F = G \frac{m . M}{R^2}}$$

Esta última es la expresión matemática de la ley de gravitación universal. Si se admite la existencia de un campo gravitatorio para todos los cuerpos, la ley de Newton puede generalizarse para todos los cuerpos del universo enunciándola así:

Dos cuerpos cualesquiera del universo se atraen mutuamente con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que existe entre sus centros.

Las fuerzas con que se atraen las dos masas no son más que un par de **acción y reacción**, tal como se muestra en la figura 3.28(a). La primera masa ejerce una fuerza de atracción sobre la segunda, que está dirigida hacia la primera, en cambio la segunda masa ejerce otra fuerza de atracción sobre la primera, que está dirigida hacia la segunda.

$F_{2\text{-}1}$: fuerza ejercida por M sobre m

$F_{1\text{-}2}$: fuerza ejercida por m sobre M.

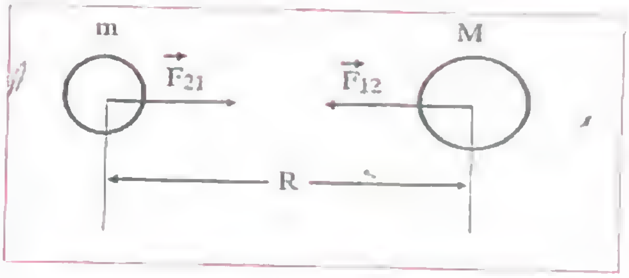


Figura 3.28(a)

El valor de la **constante de gravitación universal G** fue determinada por Henry Cavendish, usando una balanza de torsión, encontrando que:

$$\boxed{G = 6{,}67.10^{-11} \frac{N . m^2}{Kg^2}}$$

Existen diferencias entre la constante G y el valor g de la aceleración de gravedad. Mientras la primera es un escalar, universal y constante; la segunda es un vector, no es universal ni constante.

Determinación de la masa de la tierra.

Sean:

M_t : masa de la tierra

m : masa de un objeto cercano a la tierra.

La fuerza de atracción viene dada por:

$$F = m \cdot g \quad \text{..} (A)$$

De acuerdo con la ley de la gravitación,

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M_t}{Rt^2} \quad \text{..................................} (B)$$

De (A) y (B) se tiene que:

$$m \cdot g = \frac{G \cdot m \cdot M_t}{Rt^2}$$

Despejando "g" nos queda:

$$g = \frac{G \cdot M_t}{Rt^2} \quad \text{de donde}$$

$$M_t = \frac{g.Rt^2}{G} \quad \text{..} (C)$$

Sabemos que: $g = 9{,}8\ m/s^2$;

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$$

$$R_t = 6{,}37.10^6\ m$$

Sustituyendo en (C) tenemos:

$$M_t = \frac{9{,}8 \frac{m}{s^2} .(6{,}37.10^6\ m)^2}{6{,}67.10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}}$$

$$\boxed{M_t = 5{,}96.10^{24}\ Kg.}$$

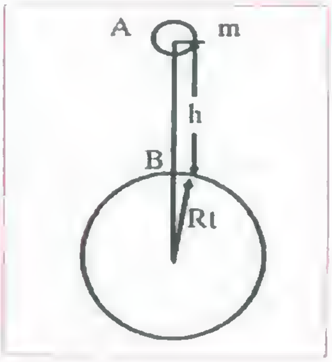
Variaciones de la aceleración de la gravedad

A lo largo de los estudios que hemos realizado se ha aceptado que la aceleración de gravedad dentro del campo gravitatorio es $g = 9{,}8\ m/s^2$, a nivel del mar y a la latitud de 45°.

Realmente este valor no es constante y es ligeramente diferente para lugares dentro de la superficie terrestre, existiendo factores que lo modifican. Uno de ellos es que el campo gravitatorio se hace cada vez menor a medida que nos alejamos del centro de la tierra.

Consideremos un cuerpo de masa "m" ubicado a una altura "h" sobre la superficie de la tierra y a una distancia $(R_t + h)$ del centro de la tierra, tal como lo indica la figura. 3.28(b).

Figura 3.28(b)



El peso de este cuerpo de acuerdo con la segunda ley de Newton, viene dado por:

$$P = m \cdot g' \quad \text{..} (1)$$

donde g' es el valor de la aceleración de gravedad en ese punto.

De acuerdo con la ley de gravitación universal la fuerza con que la tierra atrae a esta masa es:

$$P = F = G \frac{M \cdot m}{(R + h)^2} \quad \text{....................................} (2)$$

siendo M la masa de la tierra y R su radio. Igualando (1) y (2) tenemos:

$$m \cdot g' = G \cdot \frac{M \cdot m}{(R + h)^2} \quad \text{de donde}$$

$$g' = \frac{G \cdot M}{(R + h)^2}$$

Esto nos indica que **la aceleración de gravedad disminuye a medida que aumenta la altura "h"**.

Observaciones

1. Nótese que el valor de la masa m del cuerpo no aparece en la ecuación, es decir, **el valor de g' es independiente de la masa del cuerpo**.

2. Si el cuerpo está ubicado en la superficie terrestre entonces h = 0, quedándonos:

$$g' = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

A continuación se muestra una tabla con los valores de la aceleración de gravedad g' a diferentes alturas medidas por encima de la superficie terrestre.

h (Km)	g (m/s^2)	h (Km)	g (m/s^2)
1000	7,33	7000	2,23
2000	5,68	8000	1,93
3000	4,53	9000	1,69
4000	3,70	10000	1,49
5000	3,08	50000	0,13
6000	2,60		

Tabla 3.1

Por otro lado, sabemos que debido al achatamiento de la tierra el radio en los polos es inferior al radio en el Ecuador, por lo que podemos concluir diciendo que la **aceleración de gravedad en el Ecuador es menor que en los polos.**

En la tabla 3.2 aparecen las **variaciones de g de acuerdo con la altitud** (en la latitud de 45°).

En la tabla 3.3 se muestran las **variaciones de g de acuerdo a la latitud** (al nivel del mar).

Altitud (km)	g (m/s^2)	Latitud	g (m/s^2)
0	9,81	0	9,780
20	9,75	20	9,786
40	9,69	40	9,802
60	9,63	60	9,819
80	9,57	80	9,831
100	9,51	90	9,832
200	9,22		

Tabla 3.2 Tabla 3.3

Problemas resueltos

Problema 1

Calcular la gravedad en la superficie del planeta Júpiter, sabiendo que su radio es 11,14 veces mayor que el de la tierra y que su masa lo es 318,36 veces. ¿Cuánto pesa en Júpiter un cuerpo que en la tierra pesa 85 Kp?.

Datos:

$$\begin{aligned} g_j &= ? \\ R_j &= 11{,}14 \, . \, R_t \\ &= 11{,}14 \, . \, 6370 \text{ Km} \\ &= 7096{,}18 \text{ Km} \\ &= 7{,}096 \, . \, 10^7 \text{ m} \\ m_j &= 318{,}36 \, . \, m_t \\ &= 318{,}36 \, . \, 6 \, . \, 10^{24} \text{ Kg} \\ &= 1{,}9 \, . \, 10^{27} \text{ Kg} \end{aligned}$$

Solución

$$g_j = \frac{G \, . \, m_j}{(R_j)^2}$$

$$= \frac{6{,}67.10^{-11} \dfrac{N.m^2}{Kg^2} .1{,}9.10^{27} \text{ Kg}}{(7{,}096.10^7 \text{ m})^2}$$

$$\boxed{g_j = 25{,}16 \text{ m/s}^2}$$

Para calcular cuánto pesa en Júpiter un cuerpo que en la tierra pesa 85 Kp, bastará con determinar la masa de ese cuerpo en la tierra.

$$m_t = \frac{P_t}{g_t} = \frac{85.9{,}8 \text{ N}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 85 \text{ Kg}$$

Luego, el peso en Júpiter será:

$$P_j = m_t.g_j = 85 \text{ Kg}.25{,}16 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{P_j = 2138{,}6 \text{ N}}$$

Problema 2

Un satélite terrestre describe una órbita circular a una altura de 300 Km por encima de la superficie terrestre. ¿Cuál es la velocidad del satélite, suponiendo que el radio de la tierra es 6370 Km, ¿cuál es su período?.

Datos

$h_s = 300$ Km

$R_t = 6370$ Km

Solución

Nuestro problema consiste en calcular la velocidad del satélite (Vs).

$R_S = R_t + h_S$

$= 6370 \text{ Km} + 300 \text{ Km}$

$= 6670 \text{ Km}$

La fuerza centrípeta del satélite debe ser igual a la fuerza gravitacional entre ellos, por lo que puede escribirse que:

$F_c = F_g$

$$m \cdot a_c = \frac{G \cdot M_t \cdot m}{R^2}$$

$$m \frac{V^2}{R} = \frac{G \cdot M_t \cdot m}{R^2}$$

$$V^2 = \frac{G \cdot M_t}{R}$$

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot M_t}{R}}$$

Sustituyendo valores, nos queda que:

$$V = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2 . 6.10^{24} \text{ Kg}}{6670000 \text{ m}}}$$

$V = 7745{,}96$ m/s

El período lo obtenemos usando

$$V = \frac{2\pi . R}{T} \text{ de donde,}$$

$$T = \frac{2\pi . R}{V}$$

$$T = \frac{2\pi .6{,}67.10^6 \text{ m}}{7745{,}96 \text{ m/s}}$$

$T = 54076{,}67$ s

Problemas propuestos

Valores constantes

Masa de la tierra:	6.10^{24} Kg
Masa de la luna:	$7{,}4.10^{22}$ Kg
Masa de un electrón:	$9{,}1.10^{-31}$ Kg
Masa de un protón:	$1{,}67.10^{-27}$
Radio de la tierra:	6370 Km
Radio de la luna:	1736,6 Km

1. La masa de un cuerpo es 4,8 Kg y está separada de otra por una distancia de 3 m, atrayéndose con una fuerza de $8{,}8.10^{-11}$ N. Determinar el valor de la otra masa.

R: 2,47 Kg

2. Dos cuerpos de igual masa están separados por una distancia de 10 cm. Si se atraen con una fuerza de $2{,}4.10^{-10}$ N, hallar el valor de cada masa.

R: 0,18 Kg

3. Dos cuerpos de masas 10 Kg y 20 Kg se atraen con una fuerza de 8.10^{-15} N. Calcular a qué distancia se encuentran los cuerpos para que pueda actuar dicha fuerza.

R: 1291 m

4. La masa de la tierra es aproximadamente 6.10^{24} Kg y la de la luna es igual al valor anterior multiplicado por 0,0123. Si la distancia media entre la tierra y la luna es $3{,}84.10^5$ Km. Calcular la fuerza gravitatoria de atracción entre ellas.

R: 2 . 10^{20} N

5. Un satélite se encuentra en una órbita circular a una altitud de 1000 Km. El radio de la tierra es 6370 Km. Calcular la rapidez del satélite y el período de su órbita.

R: $7{,}35.10^3$ m/s ; 105 min.

6. El radio del planeta Mercurio es aproximadamente 2749 Km y su masa $3{,}63.10^{23}$ Kg. Calcular la aceleración de gravedad en dicho planeta. ¿Cuánto pesará en ese planeta una persona que en la tierra pesa 70 kilopondios?.

R: 3,2 m/s^2 ; 224,2 N

7. ¿Cuál es el peso de una persona en la luna, sabiendo que en la tierra pesa 60 Kp?.

R: 98,2 N

8. Un cuerpo pesa 735 N en la tierra y al nivel del mar, donde g = 9,8 m/s^2. ¿Cuánto disminuirá su peso en un lugar ubicado a 3000 m de altura sobre la superficie de la tierra?.

R: 60,75 N.

9. Calcular la aceleración de la gravedad en la superficie del sol, sabiendo que su radio es 110 veces el radio de la tierra y su masa es 330000 veces la masa de la tierra.

R: 268,98 m/s^2.

10. ¿Cuál es el período de revolución de un satélite artificial de masa m que circunda la tierra siguiendo una trayectoria circular de 8000 Km de radio?.

R: 1,57 horas

11. Calcular el período de rotación y la velocidad lineal de un satélite artificial que se mueve alrededor de la luna a una altura de 200 Km de la superficie lunar. Masa de la luna: $7{,}3 . 10^{22}$ Kg. Radio de la luna: $1{,}7.10^6$ m

R: $7{,}44.10^3$ s ; $1{,}6.10^3$ m/s

12. Un satélite artificial se desplaza en una órbita circular a una altura de 300 Km sobre la superficie de la tierra. ¿Cuál es su aceleración centrípeta?.

R: 8,98 m/s^2

13. La distancia tierra-luna es 3.10^5 Km aproximadamente. ¿A qué distancia del centro de la tierra la gravedad producida por ella y por la luna se anulan?.

R: 27.10^4 Km

14 ¿A qué altura de la superficie de la tierra sería la aceleración de la gravedad 4,9 m/s?. Usa los valores que aparecen en la tabla de valores constantes.

R: $2{,}6.10^6$ m

15. Una masa de 8 Kg y otra de 6 Kg están separadas 0,25 m. ¿Cuál es la fuerza gravitatoria neta debida a estas masas sobre una masa de 4 kg ubicada en un punto a 0,18 m sobre la mediatriz de la recta que separa las dos primeras masas?.

R: $6{,}43.10^{-6}$ N

16. Se tienen masas de magnitudes m_1 = 200 g y m_2 = 800 g están separadas entre si 12 cm. ¿Qué fuerza resultante ejercen ellas sobre una masa m_3 = 5000 g ubicada entre ellas, sobre la recta que las une y a 4 cm de m_1?.

R: 0 N

17. Una masa m_1 = 3 Kg está sobre el eje vertical en el punto (0,4)m. Otra masa m_2 = 4 Kg está ubicada en (2,4)m. Calcular la fuerza resultante con que las dos primeras masas actúan sobre una tercera masa m_3 = 5 Kg ubicada en el origen de coordenadas.

R: $1{,}25.10^{-10}$ N

18 Una persona pesa 110 Kp en la tierra en un punto donde el valor de g = 9,8 m/s^2. Calcular la diferencia de peso de dicha persona en el sol y en la luna.

R: 29411,8 N

3.6 Ley de Coulomb

Cuando hicimos el análisis de las interacciones, al comienzo de la unidad, estudiamos las interacciones eléctricas e hicimos representaciones gráficas de dichas interacciones, Vimos que entre ellas existen fuerzas de atracción y fuerzas de repulsión.

La cuantificación de estas fuerzas fueron estudiadas a finales del siglo XVIII por el físico francés Charles Agustín Coulomb, usando una balanza de torsión semejante a la usada por Cavendish para verificar la ley de gravitación universal de Newton.

Después de varios experimentos cuantitativos, llegó a conclusiones como:

1. La fuerza de interacción entre dos cargas eléctricas puntuales es proporcional al producto de dichas cargas:

$$F \propto q_1 \cdot q_2$$

2. La fuerza F de atracción o repulsión entre dos cargas puntuales, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre ellas:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Estas dos relaciones pueden condensarse escribiendo que:

$$F \propto \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Esta relación se transforma en una igualdad, introduciendo una constante de proporcionalidad adecuada K, y puede escribirse que:

$$\boxed{F = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}$$

donde K es una **constante de proporcionalidad** cuyo valor depende del medio donde se encuentren las cargas y el sistema de unidades seleccionando.

Esta ley puede ser enunciada así:

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

La unidad de carga eléctrica **en el sistema internacional (SI)** es el Coulomb, **el cual se abrevia con la letra C y su carga eléctrica equivale a la carga de $6{,}25.10^{18}$ electrones.**

La carga del electrón será:

$$1\,e = \frac{1C}{6{,}25 \cdot 10^{18} \text{ electrones}}$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{C}{\text{electrón}}$$

$$\boxed{e = 1{,}6.10^{-19} \text{ Coulomb}}$$

La constante K de la ley de Coulomb puede ser reemplazada por:

$$K = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_o} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

donde ε_o es la **constante de permitividad** y su valor en el sistema M.K.S. es:

$$\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Sustituyendo π y ε_o por sus valores en (1) nos queda:

$$K = \frac{1}{4.3{,}14.8{,}85.10^{-12}\ C^2/N.m^2}$$

$$K = 8{,}9.10^9\ N^2.m/C^2$$

$$\boxed{K = 9 \cdot 10^9\ N^2.m/C^2}$$

Comparación entre la ley de Coulomb y la ley de Gravitación Universal.

Veamos la comparación entre ambas leyes en cuanto a semejanzas y diferencias se refiere:

1. En la **ley de Coulomb** la fuerza electrostática es proporcional al producto de las cargas eléctricas, en tanto que en la **ley de gravitación universal** la fuerza gravitacional es proporcional al producto de las masas.

2. En ambas leyes, tanto las fuerzas gravitatorias como las fuerzas eléctricas dependen del **inverso del cuadrado** de la separación de las masas o de las cargas.

3. En cuanto a **la constante** se refiere, en la ley de gravitación la constante tiene un mismo valor en todo el universo, en cambio en la ley de Coulomb la constante tiene distinto valor según sea el medio donde se encuentren las cargas.

4. Como en la naturaleza existen dos tipos de cargas y sólo un tipo de masa, se tendrá que las fuerzas eléctricas son **repulsivas y atractivas**, en cambio las fuerzas gravitacionales serán **únicamente atractivas.**

Problemas resueltos

Problema 1

Dos cargas eléctricas $q_1 = +2.10^{-3}$C y $q_2 = +3.10^{-3}$C están separadas 6 cm. Otra carga $q_3 = -4.10^{-3}$C está ubicada entre ellas, sobre la misma recta y a 2 cm de q_1. Calcular la fuerza resultante que actúa sobre q_3

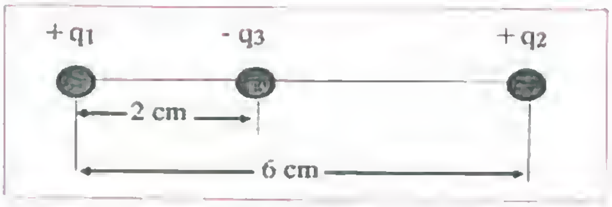


Figura. 3.29

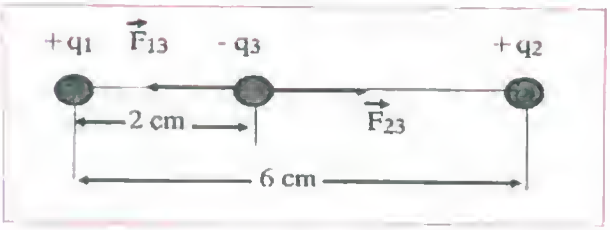


Figura. 3.30

Solución

En la figura 3.29 se muestran las condiciones del problema según el enunciado.

F_{13}: fuerza con que q_1 actúa sobre q_3

F_{23}: fuerza con que q_2 actúa sobre q_3.

Calculando las magnitudes de esas fuerzas por la ley de Coulomb, se tendrá que:

$$F_{13} = \frac{K.q_1.q_3}{(r_{13})^2}$$

$$= \frac{9.10^9 \dfrac{N.m^2}{C^2} .(2.10^{-3}C)(4.10^{-3}C)}{(0{,}02\ m)^2}$$

$$F_{13} = 1{,}8.10^8\ N.$$

$$F_{23} = \frac{K.q_2.q_3}{(r_{23})^2}$$

$$= \frac{9.10^9 \dfrac{N.m^2}{C^2} .(3.10^{-3}C)(4.10^{-3}C)}{(0{,}04\ m)^2}$$

$$F_{23} = 6{,}75.10^7\ N$$

Como los vectores tienen sentidos opuestos, la fuerza resultante F_R viene dada en magnitud así:

$$F_R = F_{13} - F_{23}$$

$$F_R = 1{,}8.10^8\ N - 6{,}75.10^7\ N$$

$$F_R = 1{,}13.10^8\ N.$$

La dirección es la de la recta que las une y el sentido es hacia la izquierda, porque F_{13} es mayor que F_{23}.

Problema 2

Una carga eléctrica $q_1 = +2.10^{-4}$C está sobre el eje "y" a 3 m del origen; otra carga $+q_2 = 3.10^{-4}$C por debajo del eje "y" a 3 m del origen. Calcular la fuerza resultante sobre una carga positiva $q_3 = 5.10^{-4}$C ubicada sobre el eje "x" y 4 m del origen.

Solución

En la figura. 3.31 se muestran las fuerzas con que q_1 actúa sobre q_3, que llamaremos F_{13}, y la fuerza con que q_2 actúa sobre q_3, que llamaremos F_{23}. Todas estas fuerzas son de repulsión porque todas son positivas.

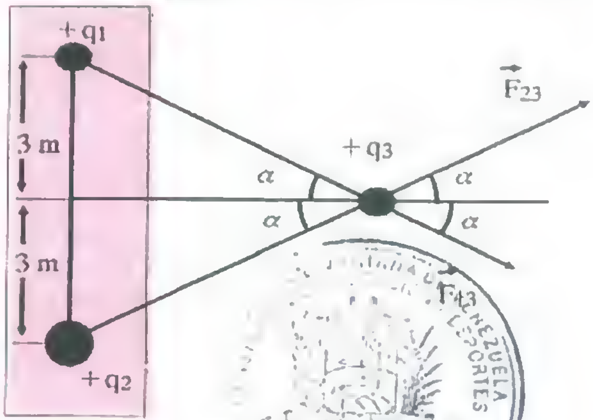


Figura. 3.31

Imaginemos un eje de coordenadas cuyo origen pasa por el punto donde está ubicada la carga q_3. Esto lo representamos en la figura 3.32, donde se muestran también las proyecciones sobre los ejes. Encontremos la fuerza resultante como vimos en el parágrafo 3.4.

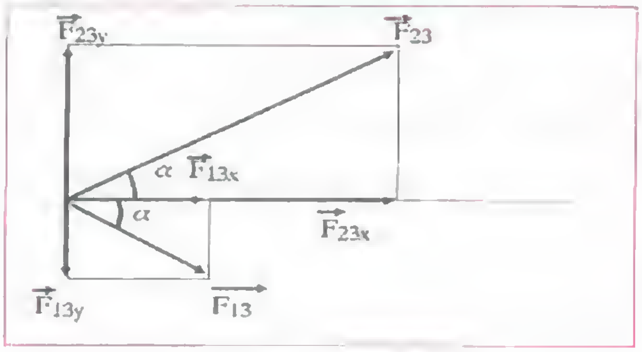


Figura. 3.32

La distancia q_1 a q_3 en la figura 3.31 la calculamos por Pitágoras:

$$r_{13} = \sqrt{9\ m^2 + 16\ m^2} = 5m$$

Calculemos las magnitudes de F_{23} y F_{13}, aplicando la ley de Coulomb:

$$F_{13} = \frac{K.q_1.q_3}{(r_{13})^2}$$

$$F_{13} = \frac{9.10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}\ (2.10^{-4}C).(5.10^{-4}C)}{(5\ m)^2}$$

$$F_{13} = 36\ N$$

$$F_{23} = \frac{K.q_2.q_3}{(r_{23})^2}$$

$$F_{23} = \frac{9.10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}\ 3.10^{-4}C\ .\ 5.10^{-4}C}{(5\ m)^2}$$

$$F_{23} = 54\ N$$

Calculemos el valor del ángulo :

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{3m}{4m}$$

$$\alpha = 36^{o}\ 52'\ 12''$$

$$\alpha = 37^{o}$$

Calculemos ahora las magnitudes de las componentes sobre los ejes, tal como lo hicimos en el parágrafo 3.4

Sobre eje "x"

$$F_{23x} = F_{23}\ .\cos \alpha$$
$$F_{23x} = 54N\ .\cos 37^{o}$$
$$F_{23x} = 43{,}12\ N$$

$$F_{13x} = F_{13}\ .\cos 37^{o}$$
$$F_{13x} = 36N\ .\cos 37^{o}$$
$$F_{13x} = 28{,}75\ N$$

$$F_x = F_{23x} + F_{13x} = 43{,}13\ N + 28{,}75\ N$$

$$F_x = 71{,}87\ N$$

Sobre eje "y"

$$F_{23y} = F_{23}\ .\ \text{sen}\ \alpha$$
$$F_{23y} = 54\ .\ \text{sen}\ 37^{o}$$
$$F_{23y} = 32{,}49\ N$$

$$F_{13y} = F_{13}\ .\ \text{sen}\ \alpha$$
$$F_{13y} = 36\ N\ .\ \text{sen}\ 37^{o}$$
$$F_{13y} = 21{,}67\ N$$

$$F_y = F_{23y} + F_{13y} = 32{,}49\ N + 21{,}67\ N$$

$$F_y = 54{,}16\ N$$

La magnitud de la fuerza resultante viene dada por:

$$F_r = \sqrt{(71{,}87N)^2 + (54{,}16\ N)^2}$$

$$F_r = 89{,}99\ N$$

La dirección de F_r viene dada por:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{54,16\ N}{71,87\ N}$$

$\theta = 37°$

Tabla de constantes

Partícula	Carga (C)	Masa (Kg)
electrón	$1,6.10^{-19}$	9,1.10-31
Protón	$1,6.10^{-19}$	1,6.10-27
Neutrón	no tiene	$1,6.10^{-27}$

Problemas propuestos

1. Dos cargas puntuales iguales distan entre sí 20 cm, atrayéndose con una fuerza de 2 N. ¿Cuál es el valor de dichas cargas?.

R: $2,98.10^{-6}$C.

2. Si la tierra y la luna se cargaran con un Coulomb cada una, ¿cuánto valdría la fuerza de repulsión?. La distancia entre ellas es aproximadamente 384000 Km.

R: $6,12.10^{-8}$ N.

3. Dos partículas alfa están separadas por una distancia de 10^{-11} cm. Calcular la fuerza electrostática con que se repelen y la fuerza gravitatoria con que se atraen, y comparar ambos resultados. Las particulas alfa tienen una carga positiva doble en valor absoluto de un electrón y su masa es $6,68 . 10^{-27}$ Kg. Tómese la constante de la ley de Coulomb en M.K.S. y la constante de gravitación universal $6,67 . 10^{-11}$ unidades de M.K.S. Carga de un electrón: $1,6 . 10^{-19}$C.

R: $2,97.10^{-37}$ N ; $9,2.10^{-2}$ N

4. Dos cargas eléctricas puntuales e iguales distan entre si 0,2 cm. Si se repelen con una fuerza de 12 N, calcular el valor de las cargas.

R: $7,3.10^{-8}$ C

5. Calcular la fuerza eléctrica de repulsión entre dos protones en una molécula de hidrógeno sabiendo que la separación entre ellos es de $7,4.10^{-11}$ m. Calcula también la fuerza de atracción gravitacional correspondiente y compárala con la fuerza de repulsión eléctrica.

R: $4,21.10^{-8}$ N ; $1,16.10^{-36}$ N

6. Dos cargas eléctricas iguales en magnitud y signo se repelen con una fuerza de 1500 N cuando están separadas 60 cm. Calcular la separación que debe hacerse entre las cargas con respecto a la posición anterior para que la fuerza de repulsión se reduzca a la tercera parte.

R: 47,9 cm

7. En un átomo de hidrógeno el electrón y el protón están separados $5,3.10^{-11}$ m. Calcular la fuerza electrostática que se ejerce.

R: $8,2.10^{-8}$ N

8. ¿Qué separación debe existir entre dos protones para que su fuerza eléctrica repulsiva sea igual al peso de uno de ellos sobre la superficie de la tierra?. La masa del protón es $1,7.10^{-27}$ Kg y su carga es la misma del electrón. Use $g = 9,8\ m/s^2$.

R: 0,12 m

9. Tres cargas eléctricas $q_1 = 2.10^{-6}$C; $q_2 = 3.10^{-6}$C y $q_3 = -3 . 10^{-6}$C están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de 1 m. de lado. Las cargas q_3 y q_2 están en los vértices izquierdo y derecho de la base respectivamente, y q_1 está en el vértice superior. Calcular la fuerza resultante sobre q_2.

R: 0,0714 N

10. En el vértice superior de la hipotenusa de un triángulo rectángulo se ubica una carga de 10^{-5}C y en el vértice del ángulo recto otra carga de 4.10^{-6}C. Si el ángulo en el vértice inferior de la hipotenusa es de 60°, y la longitud de la hipotenusa es de 12 cm, ¿cuál es la fuerza resultante sobre una carga de $2 . 10^{-6}$C colocada en este vértice.

R: 28,39 N ; 202° 24' 39"

11. Tres cargas eléctricas están ubicadas de tal forma que constituyen un triángulo equilátero de 10 cm de lado. La carga q_1 está ubicada en el vértice superior izquierdo; q_2 en el vértice superior derecho, y q_3 en el tercer vértice. Si $q_1 = 5.10^{8}$ C y $q_2 = q_1$; $q_3 = - q_1$, hallar la fuerza neta sobre q_1.

R: $\alpha = 239°\ 59'\ 57''$; $2,25.10^{-3}$ N.

3.7 Fuerza. Movimiento.

Antes hemos hecho un análisis del movimiento sin considerar las causas que lo originan, , estudio del cual se encargó la cinemática. Este estudio no es lo suficiente, porque nos haríamos las preguntas siguientes: ¿qué es lo que produce dicho movimiento?, ¿por qué no se desplaza con movimiento uniforme?. Estas preguntas estaríamos en capacidad de responderlas si hacemos un estudio dinámico del movimiento, es decir, lo estudiamos tomando en cuenta las causas que lo originan.

Desde tiempos muy remotos estas relaciones entre fuerzas y movimientos han sido analizadas por los hombres de ciencia, comenzando por Aristóteles. Él, al analizar estas relaciones, creía que un cuerpo sólo podría mantenerse en movimiento cuando existiera una fuerza que actuara continuamente sobre él, pero al cesar la fuerza, el cuerpo volvería al reposo.

Posteriormente Galileo realizó experiencias que lo llevaran a conclusiones diferentes a las de Aristóteles. Estas observaciones se pueden resumir así:

* Si una esfera está en reposo, sobre una superficie horizontal, al empujarla con cierta fuerza se pone en movimiento. La esfera continuaba moviéndose aun después de dejar de aplicar la fuerza, lo que condujo a Galileo a decir que un cuerpo podría estar en movimiento sin la acción permanente de una fuerza.

* Repitiendo el experimento sobre una superficie horizontal más lisa, observó que el cuerpo recorría mayor distancia una vez que dejaba de actuar la fuerza.

Después de una serie de experimentos similares, Galileo extrajo como conclusión que un cuerpo se detenía después de haber dejado de impulsarlo, en virtud del efecto del roce entre las superficies en contacto. Si logra eliminarse este roce, entonces el cuerpo se movería en forma indefinida con movimiento rectilíneo uniforme.

Las conclusiones de Galileo fueron sintetizadas así:

Si un cuerpo está en reposo, para ponerlo en movimiento es necesaria la acción de una fuerza sobre él. Una vez iniciado éste y después de cesar la acción de las fuerzas que actúan, continuaría moviéndose en forma indefinida, en línea recta y con velocidad constante.

Todos los experimentos de Galileo permitieron asignarle a la materia una propiedad llamada **Inercia**, por la cual un cuerpo tiende a permanecer en su estado de reposo o de movimiento uniforme y rectilíneo, es decir, si un cuerpo está en reposo, él tiende por inercia a continuar en reposo, y solamente una fuerza lo pone en movimiento. Si el cuerpo está moviéndose, sin que ninguna fuerza actúe sobre él, el objeto tiende por inercia a moverse en línea recta con velocidad constante.

3.8 Primera ley de Newton

Newton, basándose en los estudios de los físicos que le habían precedido, entre ellos Galileo, estructuró los principios de la mecánica. Como podremos notar, la primera ley, que enunciaremos pronto, no es más que un resumen de las experiencias de Galileo referidas a la inercia, razón por la cual es llamada también **Ley de Inercia**. Dicha ley puede ser enunciada de la manera siguiente:

Todo cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, a menos que actúen sobre él fuerzas que lo obliguen a cambiar dicho estado.

Analicemos las condiciones siguientes:

* Si varias fuerzas actúan simultáneamente sobre un cuerpo, ellas pueden ser sustituidas por una única fuerza capaz de hacer el mismo efecto que las componentes. Esa única fuerza es llamada resultante.

* Si la magnitud de esa resultante es nula, todo ocurre como si no existiese fuerza sobre el cuerpo.

Estas observaciones conducen a enunciar la primera ley de Newton, de la manera siguiente:

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza o actúan varias que se anulan entre sí, entonces el cuerpo está en reposo o bien en movimiento rectilíneo y uniforme.

Esto último indica que tanto el reposo $V = 0$, como el movimiento rectilíneo y uniforme son estados equivalentes desde el punto de vista dinámico.

Condición de equilibrio de un cuerpo

Se dice que un cuerpo permanece en equilibrio cuando está involucrado dentro de los siguientes casos:

El cuerpo se encuentra en reposo.

El cuerpo se mueve con velocidad constante, es decir con movimiento rectilíneo y uniforme.

Esto nos permite escribir lo siguiente:

La condición para que un cuerpo permanezca en equilibrio es que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

3.9. Segunda ley de Newton. Masa de un cuerpo.

Consideremos una caja de masa m, e imaginemos esa caja dotada de unas rueditas que le permitan desplazarse a lo largo de una superficie horizontal. Esa superficie debe ser tan perfectamente pulida, que la caja al moverse, casi no tenga roce entre ella y el plano horizontal.

Supongamos que la caja es halada por una fuerza F (figura 3.33) posteriormente por una fuerza 2F (figura 3.34) y por último una fuerza 3F (figura 3.35).

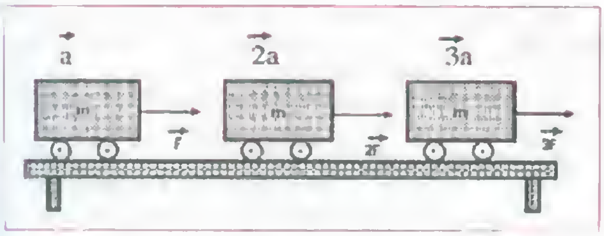


Figura 3.33 figura 3.34 Figur 3.35

Si a una caja de masa m aplicamos una fuerza F adquiere una aceleración a. Figura 3.33.

Si a una caja de masa m aplicamos una fuerza 2F adquiere una aceleración 2a. Figura 3.34.

Si a una caja de masa m aplicamos una fuerza 3F adquiere una aceleración 3a Figura 3.35.

En el caso de la fuerza F, la caja adquiere una aceleración a; la fuerza 2F produce una aceleración 2a y si se aplica la fuerza 3F, adquiere una aceleración 3a. Como se puede notar, **la aceleración aumenta proporcionalmente con el aumento de la fuerza.**

Consideremos ahora tres cajas de masas diferentes, a las cuales se les aplica la misma fuerza F como lo indican la figuras 3.36; 3.37 y 3.38.

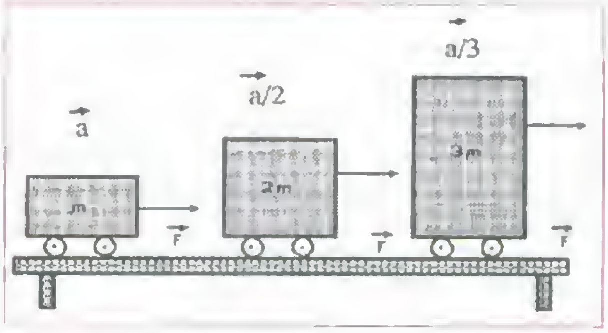


Figura 3.36 Figura 3.37 Fig. 3.38

Si a una caja de masa m le aplicamos una fuerza F, se obtiene una aceleración a. Figura 3.36

Si a una caja de masa 2m le aplicamos la misma fuerza F la aceleración se reduce a la mitad.

Si a una caja de masa 3m le aplicamos una fuerza F la aceleración se reduce a la tercera parte.

Aquí notaremos que el movimiento es más lento a medida que va aumentando la masa, lo cual nos hace ver que la aceleración disminuye proporcionalmente con el aumento de la masa.

De acuerdo a las observaciones realizadas, podemos concluir enunciando la segunda ley de Newton o **ley fundamental de la dinámica** de la manera siguiente:

La aceleración adquirida por un cuerpo, cuando sobre él actúa una fuerza resultante no equilibrada, es directamente proporcional a la fuerza aplicada, e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Para expresar matemáticamente esta ley, podemos escribir que el cociente entre la fuerza aplicada a un cuerpo y a la aceleración que adquiere, permanece constante. Es decir, si sobre un cuerpo ejerciéramos sucesivamente distintas fuerzas de intensidades F_1, F_2, F_3, F_4, etc. y sus correspondientes aceleraciones fuesen a_1, a_2, a_3, a_4, etc., se cumplirá en valor absoluto que:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \frac{F_4}{a_4} = K$$

Ese valor constante es la masa del cuerpo, pudiéndose escribir que:

$$\frac{F}{a} = m \quad ó \quad F = m \cdot a$$

Unidades de fuerza

Partiendo de la fórmula fundamental de la dinámica, podemos obtener las unidades de la fuerza. Para ello sustituimos en la fórmula, las masas y las aceleraciones en los sistemas c.g.s y M.K.S.

$$\text{c.g.s.}\quad F = m.a = gr.\frac{cm}{s^2} = \textbf{Dina}$$

$$\text{M.K.S.}\quad F = m.a = Kg.\frac{m}{s^2} = \textbf{Newton}$$

El sistema técnico

Este sistema toma como unidad fundamental la fuerza, en vez de la masa y su unidad se llama **kilopondio (Kp)**.

Este sistema usa como unidad de masa **la unidad técnica de masa** (u.t.m.), la cual adquiere la aceleración de 1 m/s^2 al aplicarle una fuerza de 1 kilopondio.

Una vez analizadas las unidades, pasamos a definirlas de la manera siguiente:

La dina

Es la fuerza que aplicada a la masa de 1 gramo masa, le produce una aceleración de un centímetro sobre segundo cuadrado.

$$\text{dina} = 1\ gr.\ \frac{cm}{s^2}$$

El Newton

Es la fuerza que aplicada a la masa de un kilogramo, le produce una aceleración de un metro sobre segundo cuadrado.

$$\text{Newton} = 1\ Kg.\ \frac{m}{s^2}$$

El kilopondio

Es la fuerza que aplicada a la unidad técnica de masa le produce la aceleración de la gravedad, 9,81 m/s^2.

Equivalencias entre unidades de fuerza

1 Newton	=	10^5 dinas
1 Kp	=	9,8 Newton
1 Kp	=	980000 dinas

Masa inercial y masa gravitatoria.

* Masa inercial

Al intentar cambiar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo, éste se resistirá a ese cambio. La resistencia de un cuerpo a un cambio en su estado de movimiento o de reposo se le conoce con el nombre de **inercia**.

Es más difícil producirle una aceleración a un cuerpo de mucha masa que a un cuerpo de poca masa. Esto nos indica que la aceleración que adquieren los cuerpos al interactuar es independiente de la naturaleza de la fuerza, pero si depende de las características de los objetos que interaccionan.

De acuerdo a esto podemos decir:

La masa inercial de un cuerpo es la propiedad intrínseca de él, que cuantifica la inercia o resistencia a cambiar su velocidad, independientemente de la naturaleza de la fuerza aplicada.

También puede decirse que la **masa inercial** es la relación que existe entre la fuerza aplicada a un cuerpo y la aceleración adquirida por él.

* Masa gravitacional

Esta masa medida a través de la balanza no tiene nada que ver con la masa inercial, pues depende únicamente de la propiedad que tiene la tierra de atraer cuerpos situados dentro de su campo gravitacional. Por esto la masa gravitatoria se define así: **la masa gravitatoria es la masa medida en función de la fuerza que ejerce sobre ella el campo gravitacional.**

Ambas masas poseen las mismas propiedades y son equivalentes si se eligen para ellas una unidad adecuada (Kg-masa) diciéndose que: **la masa inercial de un cuerpo es proporcional a su masa gravitatoria.**

De aquí en adelante no haremos distinción entre masa gravitatoria y masa inercial, simplemente utilizaremos el término masa.

3.10 Sistemas de referencia. Inerciales y no inerciales

Cuando hicimos el estudio cinemático del movimiento hablamos sobre los sistemas de referencia, diciendo que un sistema de referencia es un punto considerado fijo a partir del cual un cuerpo cambia de posición, es decir, el movimiento de un cuerpo es relativo.

En dinámica existen dos tipos de sistemas de referencia: **los sistemas de referencia inerciales y los sistemas de referencia no inerciales.**

Para entender un poco esta situación observemos la figura 3.39, la cual muestra un automóvil dentro del cual cuelga del techo una esferita mediante un hilo y el automóvil se mueve con aceleración constante. En estas condiciones el péndulo mantiene una desviación constante respecto a la vertical y las fuerzas que actúan sobre la masa pendular son su peso **P** y la tensión **T** que ejerce el cable.

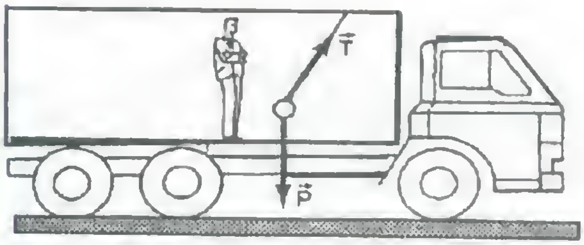


Figura 3.39

Un observador ubicado dentro del automóvil vería la esferita en reposo. Si la primera ley de Newton fuese aplicable a este observador, la resultante de todas las fuerzas debería ser nula y esto no es cierto, ya que no es posible que dos fuerzas aplicadas en direcciones distintas puedan anularse. Por lo tanto, para este observador la ley de inercia no se cumple.

Para un observador en reposo, ubicado fuera del vehículo, el hilo se desvía hacia atrás, formando un ángulo con la vertical, notando que la esferita va acelerada hacia adelante, con la misma aceleración que posee el automóvil. Este observador concluye que se cumple la ley de inercia, ya que la esferita modificó su velocidad gracias a la componente horizontal de la tensión del hilo. El observador ubicado dentro se dice que es un observador no **inercial**, pues avanza con aceleración respecto al observador inercial (fijo a tierra)

En general podemos decir:

Un sistema de referencia inercial es aquel que está en reposo o está dotado de movimiento rectilíneo y uniforme, donde son aplicables las leyes de Newton.

Un sistema de referencia no inercial es aquel que está dotado de aceleración y en donde no se cumplen las leyes de Newton.

3.11 Estudio de cuerpos bajo la acción de fuerzas prefijadas. Problemas.

Al aplicar la segunda ley de Newton del movimiento en la resolución de problemas, debemos darnos cuenta que la fuerza F a la cual se refiere será siempre la suma vectorial de todas las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo y que la masa ha de ser la masa total del cuerpo. Por ello al tratar de resolver un problema debemos proceder de la manera siguiente:

1. Se debe identificar el cuerpo al cual se aplicará la ley, fijándonos también en los objetos de su medio, ya que estos ejercen fuerzas sobre el cuerpo.

2. Se deben seleccionar los ejes de coordenadas en forma adecuada para cada cuerpo, fijando el origen y orientando los ejes, usándose como origen el punto donde se encuentran aplicadas las fuerzas. El eje "x" es paralelo al plano donde está ubicado el cuerpo, y el eje "y" será perpendicular.

3. Se hace un **diagrama de cuerpo libre** para cada cuerpo, mostrando todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre él, representándolas mediante vectores.

4. Se hallan los componentes de las fuerzas a lo largo de los ejes coordenados y se aplica la segunda ley de Newton, resolviéndose las ecuaciones resultantes.

Problemas resueltos.

Problema 1.

Movimiento de un cuerpo sobre un plano horizontal.

Un bloque de 10 Kp se desliza sobre una superficie horizontal empujado por una fuerza de 12 Kp, la cual forma un ángulo de 30^o con la horizontal tal y como lo indica la figura 3.40. Si al cabo de 3 s la velocidad del bloque es 9 m/s, calcular el valor de la fuerza de roce (F_r) que actúa sobre el cuerpo y la fuerza que el plano ejerce sobre el bloque.

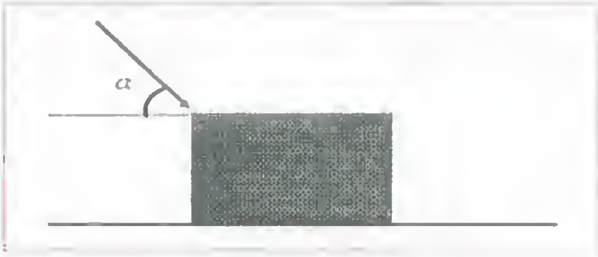


Figura. 3.40

Solución

En la figura 3.40(a) se muestran todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. A esta figura se le llama **diagrama de cuerpo libre.**

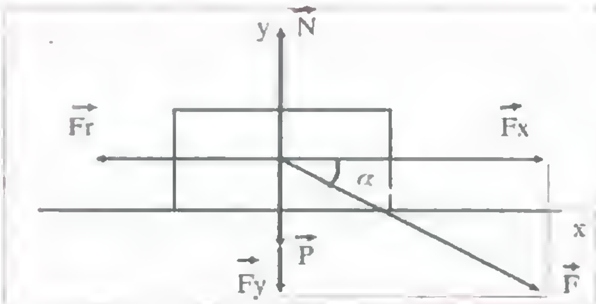


Figura 3.40(a)

Como puede notarse, la fuerza F aplicada debe ser colocada de tal forma que su punto de aplicación quede en el centro del cuerpo. Esto puede hacerse porque la fuerza es un vector deslizante.

Consideremos un sistema de ejes "x" e "y", donde el origen coincida con el punto de aplicación de la fuerza.

Las fuerzas actuantes, de acuerdo con la figura 3.40(a) son:

N : fuerza normal

P : peso del cuerpo

F_r : fuerza de roce

F : fuerza aplicada

F_x : componente de F en la dirección del eje "x"

F_y : componente de F en la dirección del eje "y"

Veamos las ecuaciones en las direcciones de los ejes:

En la dirección del eje "x"

Como el cuerpo se mueve hacia la derecha, puede escribirse en módulo que:

$F_x - F_r = m.a$ ....(1)

Pero el módulo de F_x es:

$F_x = F.\cos\alpha$ ....(2)

Sustituyendo (2) en (1), tenemos;

$F.\cos\alpha - F_r = m.a$

Despejando F_r:

$F_r = F.\cos\alpha - m.a$ ....(3)

La aceleración "a" la desconocemos, pero sabemos que al cabo de 3 s el bloque se desplaza a 9 m/s, por lo que es posible calcular la aceleración así:

$$a = \frac{V_f}{t} = \frac{9\ m/s}{3\ s} = 3\ m/s^2$$

La masa la obtenemos a través de la ecuación $P = m.g$, de donde:

$$m = \frac{P}{g} \qquad m = \frac{10 . 9{,}8\ N}{9{,}8\ m/s^2}$$

$m = 10\ Kg$

Sustituyendo F, m, a y por sus valores en (3), tenemos que:

$F_r = 12.9{,}8N.\cos 30^o - 10\ Kg.3\ m/s^2$

$F_r = 101{,}844N - 30N$

$F_r = 71{,}844N$

Para calcular la fuerza que ejerce el plano sobre el bloque calculamos la normal, trabajando en la **dirección del eje "y"**

$N = F_y + P$ .... (4)

Pero los módulos de F_y y P son:

$F_y = F.sen30^o = 12.9{,}8N.sen\ 30^o$

$F_y = 58{,}8N$ .... (5)

$P = m.g = 10\ Kg.9{,}8\ m/s^2$

$P = 98N$ .... (6)

Sustituyendo (6) y (5) en (4), nos queda:

$N = 58{,}8N + 98N$

$N = 156{,}8\ N$

Problema 2.

Movimiento de un cuerpo en reposo sobre un plano inclinado

Consideremos un cuerpo de masa 8 Kg, el cual está en reposo sobre un plano inclinado, tal como lo muestra la figura 3.41. El plano inclinado forma un ángulo $\alpha = 30^o$ con respecto al plano horizontal. Supóngase que el cuerpo está fijo a través de una cuerda atada a una pared.

Determinemos la tensión de la cuerda (T) y la fuerza normal (N) que el plano inclinado ejerce sobre el cuerpo.

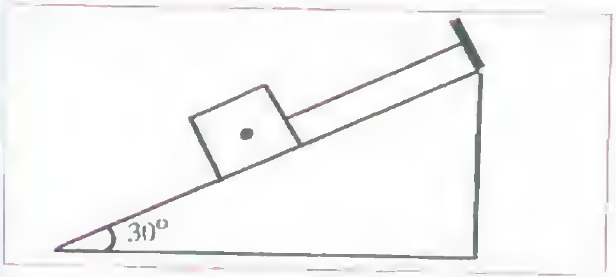


Figura. 3.41

Solución

Aquí es conveniente seleccionar el eje "x" del referencial paralelo al plano inclinado y el eje "y" perpendicular a él.

El diagrama de cuerpo libre es el indicado en la figura 3.42.

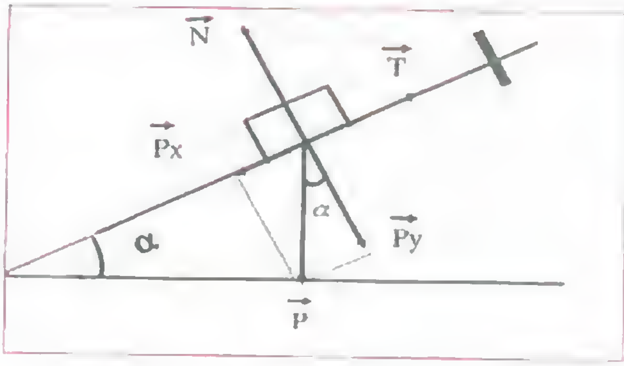


Figura. 3.42

Las fuerzas que actúan son:

N: La normal, reacción del plano sobre el cuerpo.
P: El peso del cuerpo, vector dirigido hacia el centro de la tierra.
T: La tensión, fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque.
P_x: Componente de **P** en la dirección del eje "x".
P_y: Componente de **P** en la dirección del eje "y".

El ángulo que forma el plano inclinado con el plano horizontal es igual al ángulo que forma el vector peso del cuerpo con el eje vertical (por tener sus lados perpendiculares).

Si aplicamos la segunda ley de Newton en forma vectorial, escribiremos:

$N + P + T = m\ .\ a$

Las ecuaciones en las direcciones de los ejes son:

En la dirección del eje "x"

$T - P_x = m\ .\ a$

Como no hay aceleración, porque está en reposo, se tiene que $a = 0$, pudiéndose escribir que:

$T - P_x = 0$, de donde

$T = P_x$

En módulo $P_x = P.sen\ \alpha$, luego

$T = P.sen\ \alpha = m.g.sen\ \alpha$

$T = 8\ Kg.9{,}8\ m/s^2.sen\ 30^o$

$T = 39{,}17\ N$

En la dirección del eje "y"

$N = P_y$

En módulo $P_y = P.\cos\alpha$, luego

$N = P.\cos\alpha$

$N = m.g.\cos\alpha$

$N = 8\ Kg.9{,}8\ m/s^2.\cos 30^o$

$N = 67{,}89\ N$

Problema 3.

Movimiento en horizontal y en vertical, respectivamente, de dos cuerpos unidos por un hilo que pasa por una polea de masa despreciable.

En la figura 3.43 se muestra un bloque de masa $m_1 = 2$ Kg que descansa sobre una superficie horizontal y sin rozamiento, y está unido por una cuerda que pasa por una polea a un bloque suspendido B de masa $m_2 = 1$ Kg. Si se supone que la polea no tiene masa ni fricción, calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

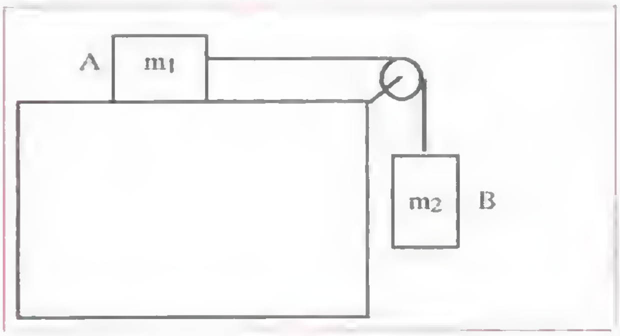


Figura. 3.43

Solución

Debemos hacer un diagrama que nos represente las condiciones del problema.

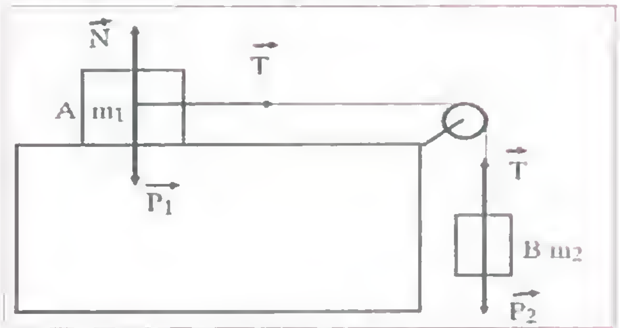


Figura. 3.44

En la figura 3.44 se muestran todas y cada una de las fuerzas que actúan. También puede mostrarse un **diagrama de cuerpo libre** como el mostrado en la figura 3.45.

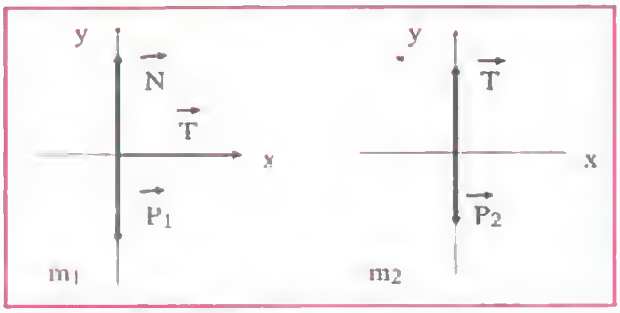


Figura. 3.45

Las fuerzas actuantes son:

Bloque A

N : fuerza normal

T : Tensión de la cuerda actuando hacia la derecha

Bloque B

P_2: peso del cuerpo

T : Tensión de la cuerda hacia arriba

Ecuaciones

En el bloque A se verifica en módulo que:

$N - P_1 = m_1.a$

Como no existe movimiento vertical se tendrá que la aceleración es cero, pudiéndose escribir que:

$N - P_1 = 0$

$N = P_1$

$N = m_1 . g$

$N = 2\ Kg.9{,}8\ m/s^2$

$\mathbf{N = 19{,}6\ N}$

Horizontalmente se desplaza hacia la derecha y la única fuerza que actúa es la tensión, por lo que puede escribirse en módulo, según la segunda ley de Newton, que:

$T = m_1 . a$ .... (1)

En el bloque B se lleva a cabo un movimiento vertical hacia abajo, pudiéndose escribir en módulo que:

$P_2 - T = m_2 \cdot a$ .... (2)

La aceleración del sistema es común para ambas masas, por lo que podemos sustituir T de la ecuación (1) en la ecuación (2), quedándonos que:

$P_2 - m_1 \cdot a = m_2 \cdot a.$

Pasando m_1 al segundo miembro y sacando "a" factor común, nos queda:

$P_2 = m_2 a + m_1 a = a(m_2 + m_1)$

Despejando "a" se tiene que:

$$a = \frac{P_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{Como} \qquad P_2 = m_2 g$$

$$a = \frac{m_2 g}{m_2 + m_1}$$

Sustituyendo m_2, g y m_1, por sus valores tenemos:

$$a = \frac{1\ Kg.9{,}8\ m/s^2}{2\ Kg + 1\ Kg}$$

$a = 3{,}26\ m/s^2$

Sustituyendo este valor de la aceleración en la ecuación (1) tenemos que:

$T_1 = m_1 a$

$T_1 = 2\ Kg.3{,}26\ m/s^2$

$T_1 = 6.52\ N$

Problema 4.

Movimiento sobre un plano inclinado y en vertical, respectivamente, de dos cuerpos unidos por un hilo que pasa por una polea de masa despreciable

En la figura 3.46 se muestran dos bloques unidos por una cuerda que pasa por la garganta de una polea y de masa $m_1 = 5$ Kg, y $m_2 = 8$ Kg. Si se supone nulo el roce, calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

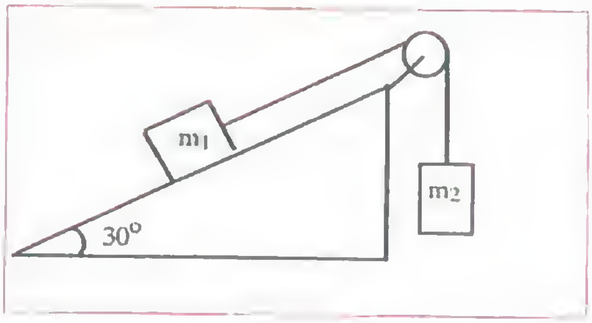


Figura. 3.46

Solución

En las figuras 3.47(a) y 3.47(b) se han dibujado los diagramas de fuerzas correspondientes a cada cuerpo.

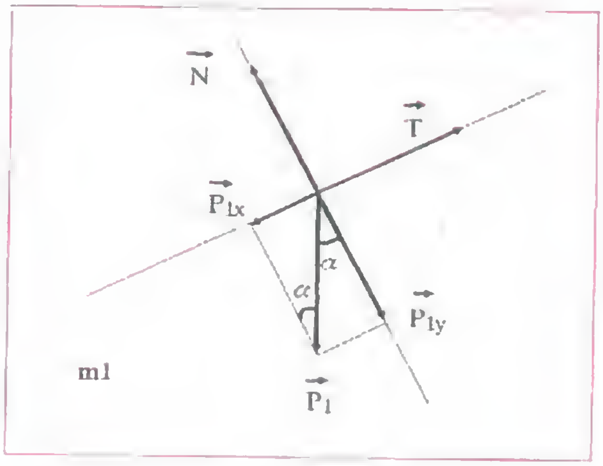


Figura. 3.47(a)

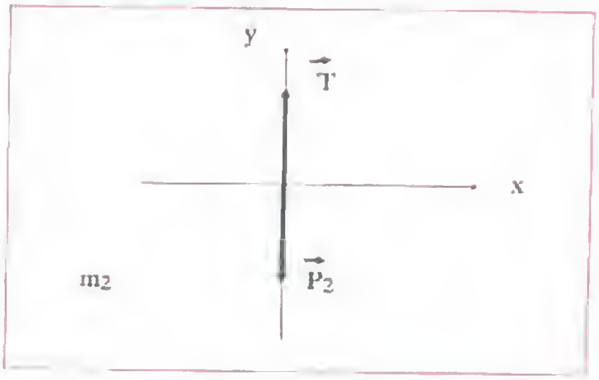


Figura. 3.47(b)

Aplicamos la segunda ley de Newton para cada cuerpo.

El cuerpo de m_1 se mueve en la dirección del eje "x" , pudiéndose escribir en módulo:

$T - P_{1x} = m_1 a$ ....(1)

El cuerpo de masa m_2 se mueve en la dirección del eje "x", pudiéndose escribir que:

$P_2 - T = m_2 a$ ....(2)

Uniendo (1) y (2) formamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Este sistema lo resolvemos usando el método de reducción:

$T - P_{1x} = m_1 a$

$P_2 - T = m_2 a$

$P_2 - P_{1x} = a(m_1 + m_2)$ ....(3)

Hemos sumado miembro a miembro y sacado factor común "a" .

Despejando "a" de (3), nos queda:

$$a = \frac{P_2 - P_{1x}}{m_1 + m_2} \quad \text{.......................................(4)}$$

Calculemos a P_2 y P_{1x}

$P_2 = m_2 g$

$P_2 = 8\ Kg.9,8 m/s^2$

$P_2 = 78,4\ N.$

$P_{1x} = P_1.\text{sen}\ \alpha$

$P_{1x} = m_1 g\ \text{sen}\ \alpha$

$P_{1x} = 5\ Kg.9,8m/s^2 . \text{sen}30^\circ$

$P_{1x} = 24,5\ N.$

Sustituyendo P_2, P_{1x} y los valores de las masas en (4), nos queda que:

$$a = \frac{78,4\ N - 24,5\ N}{5\ Kg + 8\ Kg}$$

$$a = 4,14\ m/s^2$$

Sustituyendo este valor de la aceleración en una de las ecuaciones del sistema, obtenemos T:

$T - P_{1x} = m_1 a$

$T = P_{1x} + m_1 a$

$T = 24,5\ N + 5Kg.4,14\ m/s^2$

$T = 45,2\ N.$

De esta manera hemos obtenido la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Problema 5.

Resolveremos el problema anterior, considerando la fuerza de roce ($\vec{F}_r$), siendo el coeficiente de rozamiento $\mu_k = 0,6$.

Solución

En las figuras 3.48 y 3.49 se muestran los diagramas correspondientes. En la figura. 3.48 se muestra la fuerza de roce ($\vec{F}_r$) dirigida hacia la izquierda.

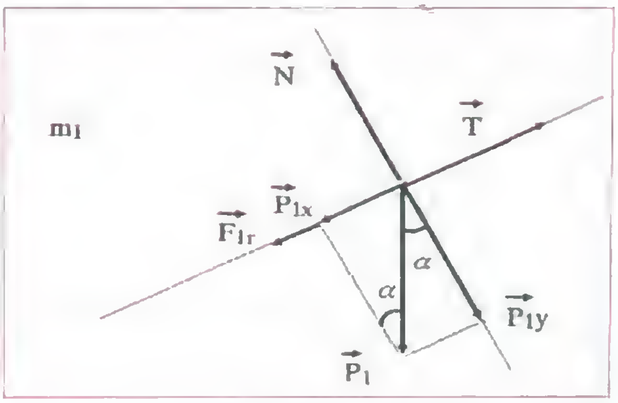


Figura 3.48

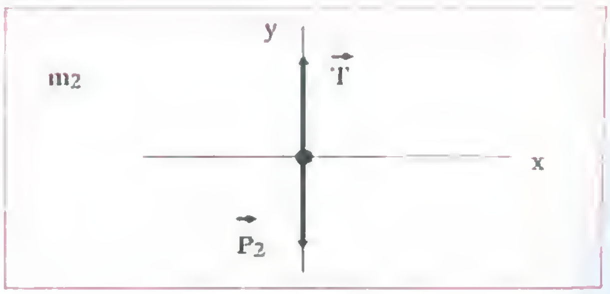


Figura 3.49

La ecuación para el cuerpo de masa m_1 en módulo es:

$$T - F_r - P_{1x} = m_1 a \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

La ecuación para el cuerpo de masa m_2 en módulo es:

$$T - P_2 = m_2 a \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la cual resolveremos por el método de reducción (tu puedes usar el método que desees).

$$T - F_r - P_{1x} = m_1 a$$

$$P_2 - T = m_2 a$$

$$P_2 - F_r - P_{1x} = a(m_1 + m_2)$$

Hemos sumado miembro a miembro y hemos tomado factor común "a"

Despejando "a" se tiene que:

$$a = \frac{P_2 - F_r - P_{1x}}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Como P_2 y P_{1x} son conocidos, calcularemos a F_r a través de:

$$F_r = \mu_k . N$$

Calculemos la magnitud de N

$$N = P_{1y} = P_1 . \cos\alpha$$

Luego:

$$F_r = \mu_k . P_1 \, . \cos\alpha$$

$$F_r = \mu_k . m_1 g \, . \cos\alpha$$

$$F_r = 0{,}6 . 5 \text{ Kg} \, . \, 9{,}8 \text{m/s}^2 \cos 30^\circ$$

$$F_r = 25{,}46 \text{ N}$$

Sustituyendo P_2, P_{1x}, F_r, m_1 y m_2 por sus valores en (3), tenemos:

$$a = \frac{78{,}4\text{N} - 25{,}46\text{N} - 24{,}5\text{N}}{13 \text{ Kg}}$$

$$a = 2{,}18 \text{ m/s}^2$$

Para encontrar la tensión T, sustituimos en una de las ecuaciones del sistema:

$$P_2 - T = m_2 a$$

$$P_2 - m_2 a = T$$

$$T = 78{,}4\text{N} - 8\text{Kg} . 2{,}18 \text{ m/s}^2$$

$$T = 60{,}96 \text{ N}.$$

Problema 6.

Movimiento sobre dos planos inclinados de sendos cuerpos unidos por un hilo que pasa por una polea de masa despreciable

En la figura 3.50 se muestran dos cuerpos de masas $m_1 = 50$ Kg y $m_2 = 70$ Kg que están unidos por una cuerda a través de una polea. Si no se considera el roce y el deslizamiento es hacia la derecha, calcular la tensión de la cuerda y la aceleración del sistema. $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 45^\circ$

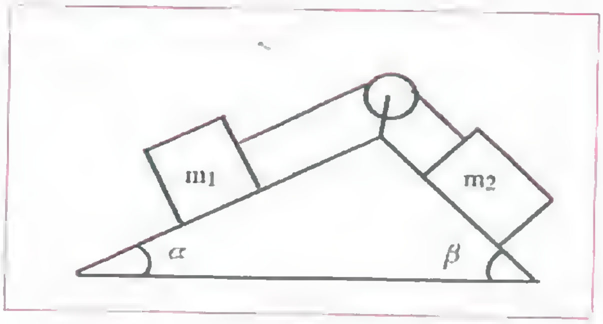


Figura. 3.50

Solución

Debemos dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo, donde estén representadas las fuerzas que actúan. Esto lo representarán las figuras. 3.50(a) y 3.50(b).

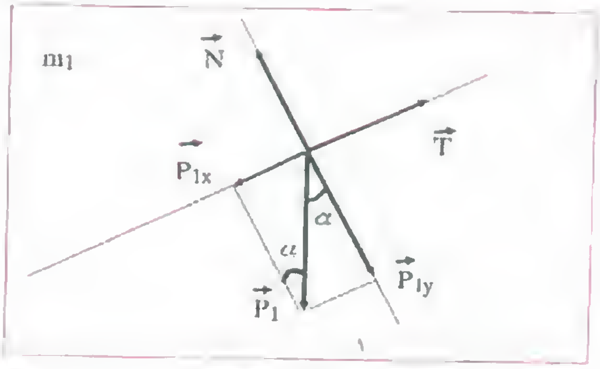


Figura 3.50(a)

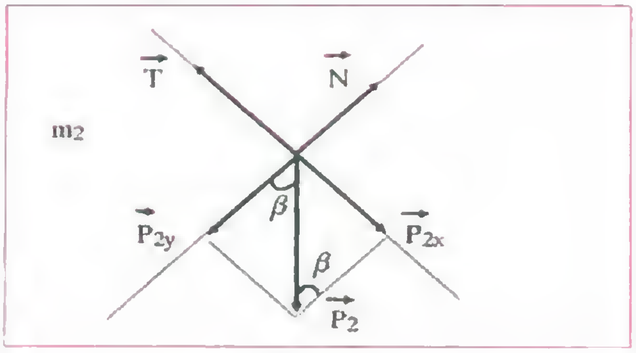


Figura. 3.50(b)

Para el cuerpo de masa m_1 se tiene que P_{1x} y P_{1y} son las componentes de P_1 en las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

Para el cuerpo de masa m_2 se tiene que P_{2x} y P_{2y} son las componentes de P_2 en las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

T: es la tensión del hilo que une los cuerpos.

Ecuaciones en la dirección "x" .

Para la masa m_1 se tiene:

$$T - P_{1x} = m_1 a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Para la masa m_2 se tiene:

$$P_{2x} - T = m_2 a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2), formamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolveremos usando el método de reducción.

$$\begin{array}{l} T - P_{1x} = m_1 a \\ P_{2x} - T = m_2 a \\ \hline P_{2x} - P_{1x} = m_1 a + m_2 a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{array}$$

Obsérvese que hemos sumado miembro a miembro.

Tomando "a" factor común se tiene que:

$$P_{2x} - P_{1x} = a(m_1 + m_2)$$

Despejando "a" tenemos:

$$a = \frac{P_{2x} - P_{1x}}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Calculemos P_{1x} y P_{2x}:

$$P_{1x} = P_1 . \operatorname{sen} \alpha$$

$$P_{1x} = m_1 . g . \operatorname{sen} \alpha$$

$$P_{1x} = 50 \text{ Kg} . 9{,}8 \text{ m/s}^2 . \operatorname{sen} 30^o$$

$$\boxed{P_{1x} = 245 \text{ N}}$$

$$P_{2x} = P_2 . \operatorname{sen} \beta$$

$$P_{2x} = m_2\, g . \operatorname{sen} \beta$$

$$P_{2x} = 70 \text{Kg} . 9{,}8 \text{ m/s}^2 . \operatorname{sen} 45^o$$

$$\boxed{P_{2x} = 485 \text{ N.}}$$

Sustituyendo P_{1x}, P_{2x}, m_1 y m_2 por sus valores en (4), obtenemos:

$$a = \frac{485 \text{ N} - 245 \text{ N}}{50 \text{ Kg} + 70 \text{ Kg}}$$

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

Despejando T de la ecuación (1) y sustituyendo, tenemos:

$$T = P_{1x} + m_1 a$$

$$T = 245\text{N} + 50 \text{ Kg} . 2 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{T = 345 \text{ N}}$$

¿Cuál sería la fuerza que el plano ejerce sobre cada bloque?.

Para ello consideremos los ejes verticales en cada bloque y planteamos las ecuaciones:

Para m_1 en módulo:

$$N = P_{1y}$$

$$N = P_1 . \cos \alpha$$

$$N = m_1\, g . \cos \alpha$$

$$N = 50 \text{ Kg} . 9{,}8 \text{ m/s}^2 . \cos 30^o$$

$$\boxed{N = 424{,}35 \text{ N}}$$

Para el cuerpo de masa m_2 en módulo:

$$N = P_{2y}$$

$$N = P_2 . \cos \beta$$

$$N = m_2\, g . \cos \beta$$

$$N = 70 \text{ Kg} . 9{,}8 \text{ m/s}^2 . \cos 45^o$$

$N = 485\ N$

Como podemos notar, la fuerza que el plano ejerce sobre cada bloque no es más que la **normal** al plano en cada caso.

Problema 7.

Movimiento horizontal de dos cuerpos unidos a través de una cuerda.

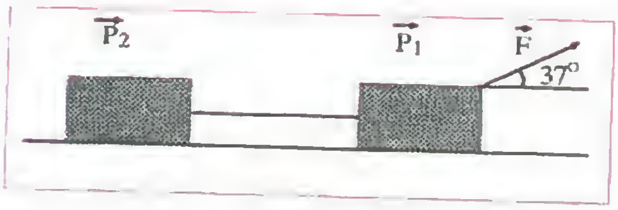


Figura. 3.51(a)

En el sistema de la figura 3.51(a) al bloque (1) se le aplica una fuerza **F** de 200 N, la cual forma con la horizontal un ángulo de 37°. Si la masa de cada bloque es 20 Kg y el coeficiente de roce dinámico es 0,1. Calcular: a) La aceleración del sistema b) La tensión del cable que mantiene unidos los dos bloques.

Solución

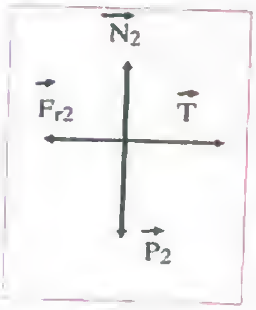


Figura. 3.51(b)

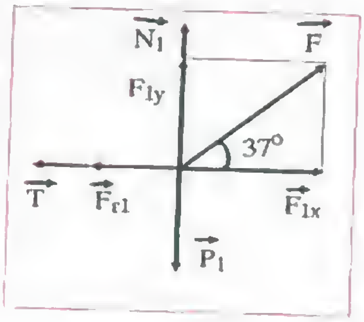


Figura. 3.51(c)

En la figura 3.51(b) se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el bloque (2) y en la figura 3.51(c) se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el bloque (1).

Calculemos las magnitudes de P_1 y P_2.

$P_1 = m_1.g$

$P_1 = 20\ Kg.9{,}8\ m/s^2$

$\boxed{P_1 = 196N}$

$P_2 = m_2.g$

$P_2 = m_2.g$

$P_2 = 20\ Kg.9{,}8\ m/s^2$

$\boxed{P_2 = 196N}$

Calculemos las magnitudes de las componentes de **F** sobre los ejes x e y.

$F_x = F.\cos 37°$

$F_x = 200\ N.\cos 37°$

$F_x = 159{,}72N$

$F_y = 200N.\text{sen}\ 37°$

$\boxed{F_y = 120{,}36N}$

En la dirección del eje Y no hay movimiento, cumpliéndose para cada bloque:

Bloque 1: $N_1 = P_1 = 196\ N$

Bloque 2: $N_2 + F_y = P_2$

$N_2 = P_2 - F_y$

$N_2 = 196\ N - 120{,}36\ N$

$\boxed{N_2 = 75{,}64\ N}$

Las fuerzas de fricción para cada bloque vienen dadas por:

$Fr_1 = \mu_k.N_1$

$Fr_1 = 0{,}1.196\ N_1$

$Fr_1 = 19{,}6\ N_1$

$Fr_2 = \mu_k.N_2$

$Fr_2 = 0{,}1.75{,}64\ N_2$

$Fr_2 = 7{,}564\ N_2$

Aplicando la segunda ley de Newton sobre el eje x a cada bloque se tendrá:

Para bloque (1)

$F_x - T - Fr_1 = m_1.a$

Para bloque 2

$T - Fr_2 = m_2.a$

Aquí se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$F_x - T - Fr_1 = m_1.a \quad \text{......................................(I)}$$
$$T - Fr_2 = m_2.a \quad \text{......................................(II)}$$

$$F_x - Fr_1 - Fr_2 = a(m_1 + m_2)$$

Hemos sumado miembro a miembro (I) y (II), tomándose "a" como factor común.

Despejando "a" se tiene:

$$a = \frac{F_x - Fr_1 - Fr_2}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo por sus valores se tendrá:

$$a = \frac{157{,}72N - 19{,}6N - 7{,}564N}{20\ Kg + 20\ Kg}$$

$$a = 3{,}3\ m/s^2$$

Sustituyendo en (II) se obtiene:

$$T = m_2.a + Fr_2$$

$$T = 20\ Kg.3{,}3\ m/s^2 + 7{,}564\ N$$

$$T = 73{,}564\ N$$

Problema 8.

Movimiento de cuerpos suspendidos, unidos por un hilo que pasa por una polea de masa despreciable.(máquina de Atwood).

La máquina consiste en un mecanismo constituido por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos a través de un hilo ideal, que cuelgan de una polea de masa despreciable. Ella fue empleada por el físico inglés Georges Atwood con el objeto de probar experimentalmente la validez de la segunda ley de Newton.

Dos cuerpos de masa $m_1 = 1{,}2$ Kg y $m_2 = 2{,}5$ Kg cuelgan de los extremos de un hilo, que pasa por la garganta de una polea. Calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda. Ver figura. 3.52

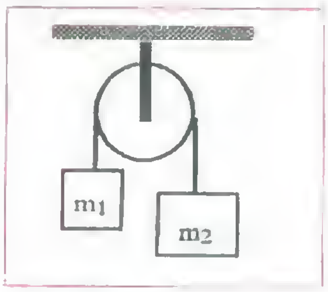


Figura 3.52

Solución

En la figura 3.53 se hace el **diagrama de cuerpo libre (D.C.L.)** para cada caso. En este caso gira hacia la derecha.

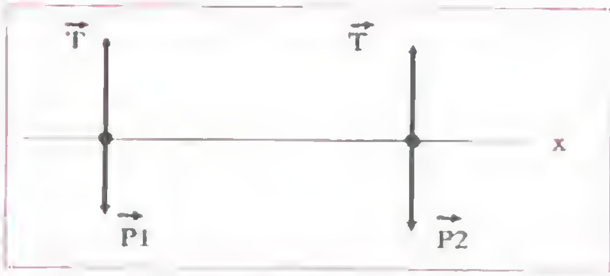


Figura. 3.53

Para m_1 el bloque asciende, escribiéndose que:

$$T - P_1 = m_1 a \quad \text{...(1)}$$

Para m_2 el bloque desciende, escribiéndose que:

$$P_2 - T = m_2 a \quad \text{...(2)}$$

Asociando las ecuaciones (1) y (2), formamos el sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Este los resolvemos sumando miembro a miembro (1) y (2) y tomando factor común "a"

$$T - P_1 = m_1 a \quad \text{... (1)}$$
$$P_2 - T = m_2 a \quad \text{... (2)}$$

$$P_2 - P_1 = a(m_1 + m_2)$$

Despejando "a" se tiene que:

$$a = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} \quad \text{... (3)}$$

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Si sustituimos valores, nos queda:

$$a = \frac{9{,}8\ m/s^2 . (2{,}5\ Kg - 1{,}2\ Kg)}{2{,}5\ Kg + 1{,}2\ Kg}$$

$a = 3{,}44\ m/s^2$

Despejando T de la ecuación (1) tenemos:

$T = m_1a + P_1$

$T = m_1a + m_1g$

$T = m_1\,(a + g)$

$T = 1{,}2\ Kg\,(3{,}44\ m/s^2 + 9{,}8\ m/s^2)$

$T = 15{,}888\ N$

Problema 9.

Movimiento sobre un plano horizontal y en vertical, respectivamente, de tres cuerpos unidos por un hilo que pasa por una polea de masa despreciable.

En la figura. 3.54 se muestran tres bloques de masas $m_1 = 2$ Kg; $m_2 = 3$ Kg y $m_3 = 8$ Kg. Si se supone nulo el roce, calcular la aceleración del sistema y las tensiones de las cuerdas.

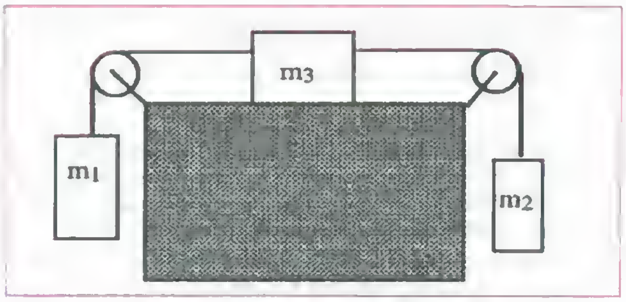


Figura. 3.54

En las figuras 3.55, 3.56 y 3.57 se hace el **diagrama de cuerpo libre (D.C.L)** para cada masa

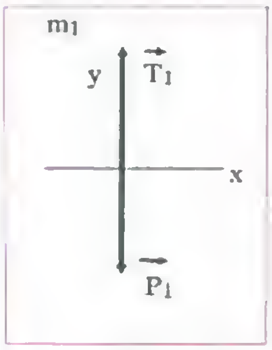


Figura. 3.55

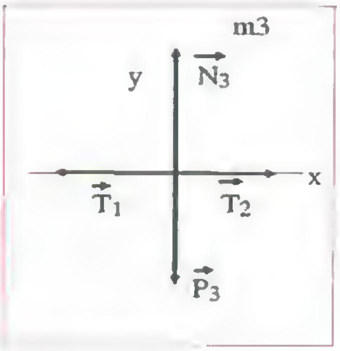


Figura. 3.56

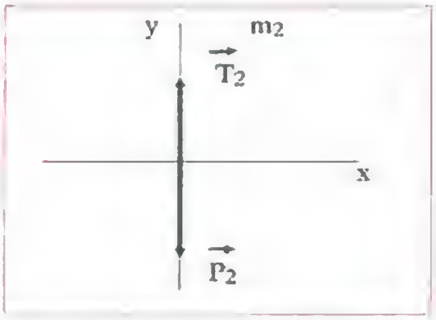


Figura 3.57

Las ecuaciones para cada cuerpo son:

Para m_1 : $T_1 - P_1 = m_1a$ ....(1)

Para m_3 : $T_2 - T_1 = m_3a$ ....(2)

Para m_2 : $P_2 - T_2 = m_2a$ ....(3)

$$P_2 - P_1 = m_1a + m_2a + m_3a$$

Hemos sumado miembro a miembro las tres ecuaciones, simplificándose T_1 y T_2.

Sacando "a" como factor común, nos queda:

$P_2 - P_1 = a(m_1 + m_2 + m_3)$

Despejando "a", tenemos que:

$$a = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \text{.................................. (4)}$$

Determinemos P_2 y P_1

$P_2 = m_2g$

$P_2 = 3\ Kg.9{,}8\ m/s^2$

$P_2 = 29{,}4\ N$

$P_1 = m_1g$

$P_1 = 2\ Kg.9{,}8\ m/s^2$

$P_1 = 19{,}6\ N$

Sustituimos los valores en la ecuación (4)

$$a = \frac{29{,}4N - 19{,}6N}{13\ Kg}$$

$$a = 0{,}75\frac{m}{s^2}$$

El anterior valor lo recmplazamos en la ecuación (1) para obtener T_1:

$T_1 - P_1 = m_1a$

$T_1 = m_1a + P_1$

$T_1 = 2\ Kg.0,75\ m/s^2 + 19,6\ N$

$T_1 = 1,5N + 19,6N$

$T_1 = 21,1N$

T_2 lo obtenemos de la ecuación (2):

$T_2 - T_1 = m_2a$

$T_2 = m_2a + T_1$

$T_2 = 3Kg.0,75m/s^2 + 21,1N$

$T_2 = 23,25N$

Preguntas

1.Supóngase que sea nula la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula.

a) De acuerdo con la segunda ley de Newton, ¿cuál debe ser la aceleración de esta partícula?.

b) ¿Qué tipo de movimiento tendría?.

c) Considerando las respuestas anteriores, ¿podrías considerar alguna relación entre la primera y la segunda ley de Newton?.

2. Sobre tres objetos A, B y C actúan fuerzas resultantes cuyos valores son respectivamente F, 2F y F/2. Se observa que A adquiere una aceleración a; B una aceleración a/2, y C una aceleración 2a. Ordena estos cuerpos según el orden creciente de sus masas.

3. Un astronauta en la luna, donde la aceleración de la gravedad es 1,6 m/s^2, usando un dinamómetro determinó que una piedra lunar pesa 16 N.

a) ¿Cuál era la masa de la piedra?.
b) ¿Cuál sería el peso de la piedra en la tierra?.

R: a) 10 Kg b) 98 N

4. ¿Por qué las personas se van hacia adelante cuando un tren en movimiento frena hasta detenerse, y se caen hacia atrás cuando un tren que está en reposo empieza a acelerarse?.

5. Explique por qué las dos fuerzas de acción y reacción de la tercera ley de Newton no producen equilibrio.

6. Cuando se traslada el punto de aplicación de una fuerza en la dirección de ella. ¿Crees que se alterará el efecto que ella produce?. Explica.

7. ¿En qué dirección debemos saltar de un autobús en movimiento?.

8. Si has respondido correctamente la pregunta anterior, ¿por qué motivo debemos hacerlo en la dirección indicada por ti?.

9.¿En qué consiste la propiedad que tienen los cuerpos, llamada inercia?.

10. ¿Cómo surge la fuerza de rozamiento?.

11. ¿Actúa la fuerza de roce sobre un cuerpo en reposo?. Explica.

12. Si un cuerpo no posee aceleración ¿puede decirse que no actúa ninguna fuerza sobre él?.

13. Si sobre un cuerpo actúa una única fuerza conocida, ¿es posible decir en qué dirección se moverá el cuerpo partiendo de esta única información?.

Problemas propuestos

1. Un bloque que pesa 100 N es arrastrado hacia arriba con movimiento uniforme a lo largo del plano inclinado sin roce, por medio de una fuerza F, tal como lo indica la figura 3.58. El ángulo de inclinación es $\alpha = 30^o$. a)¿Cuál es el valor de la componente del peso del bloque paralela al plano inclinado?; b)¿Cuál es el valor de la fuerza que el plano ejerce sobre el bloque?; c) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza F?; d) ¿Cómo se modifican las respuestas a), b) y c) si el ángulo es de 45°.

R: a) 50N; b) 86,6 N; c) 50 N;

d) 70,7 N; 70,7 N; 70,7 N

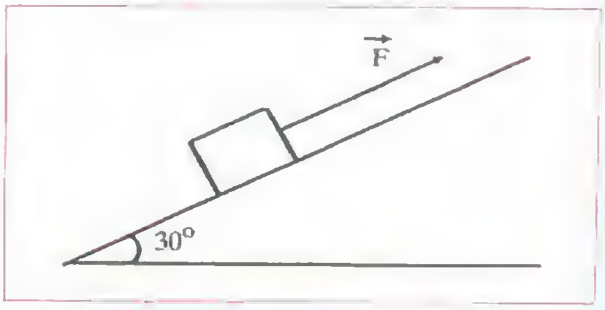


Figura. 3.58

2. Se tienen dos bloques A y B, como lo indica la figura 3.59., de masas 24,5 Kg y 19,6 Kg respectivamente. Si el bloque A es arrastrado hacia la izquierda con una fuerza de 294 N y se supone nulo el roce, calcular: a) La aceleración del sistema. b) La tensión de la cuerda. c) La distancia recorrida si la fuerza aplicada actuó durante 3 s. Use g = 9,8 m/s^2.

R: a) 2,29 m/s^2; b) 236,96 N; c) 10,3 m.

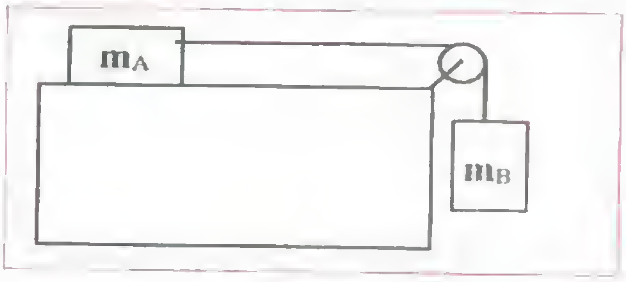


Figura. 3.59

3.Resuelve el problema anterior considerando que el coeficiente de rozamiento es 0,6 y la fuerza aplicada hacia la izquierda es de 400 N.

R: 1,45 m/s^2; 220,5 N; 6,5 m.

4. Un bloque de 50 Kg está en reposo sobre una mesa horizontal. Sobre él se aplica una fuerza de 20 Kp durante 3 s. ¿Qué velocidad adquiere el bloque en ese tiempo sabiendo que la fuerza de rozamiento entre el bloque y la mesa es de 12,5 Kp?. ¿Qué distancia recorre en ese tiempo?.

R: 4,41 m/s; 6,6 m.

5. La figura 3.60 muestra dos bloques unidos por una cuerda que pasa por la garganta de una polea, donde m_1 = 20 Kg y m_2 = 16 Kg. Si se supone nulo el roce, calcular: a) La aceleración del sistema. b) La tensión de la cuerda.

R: a) 1,078 m/s^2; b) 139, 552 N.

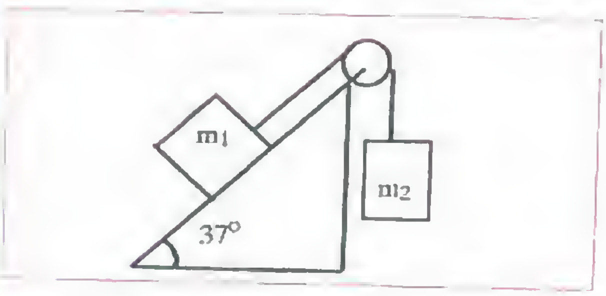


Figura. 3.60

6. Se muestra un cuerpo de masa 100 Kg. sobre un plano inclinado un ángulo de 20°. tal como lo indica la figura 3.61. Calcula la fuerza que ha de ejercerse para que el bloque se mueva hacia arriba: a) Con movimiento uniforme. b) Con aceleración de 0,2 m/s^2. c) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el plano sobre el bloque?.

R: a) 335,18 N. b) 355,18 N. c) 920 N

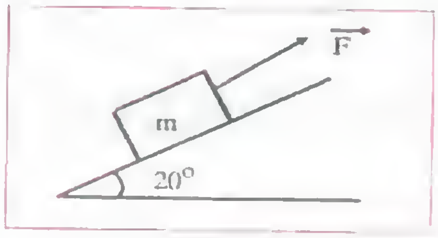


Figura. 3.61

7. Resolver el problema N° 5, suponiendo que el coeficiente de roce es 0,2.

R: 3,49 m/s^2 y 100,96 N

8. Un cuerpo de masa 5 Kg parte del reposo en el punto más bajo de un plano inclinado y liso, que forma un ángulo de 30° con la horizontal, y tiene 4,9 m de longitud. Alcanza el punto más elevado del plano en 10 s. ¿Qué fuerza exterior paralela al plano se ha ejercido sobre el bloque?. Use g = 9,8 m/s^2.

R: 24,99 N

9. Un bloque A descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento y está unido por una cuerda que pasa por una polea a un bloque suspendido B, tal como lo indica la figura 3.62. La masa del bloque B es de 12 Kg. Se abandona el sistema partiendo del reposo, observándose que el bloque B desciende 80 cm en 0,44 s. Calcula: a) La masa del bloque A. b) La fuerza con que se mueve el bloque A. c) La fuerza que ejerce el plano sobre el bloque A.

R: a) 2,23 Kg; b) 18,42 N c) 21,855 N.

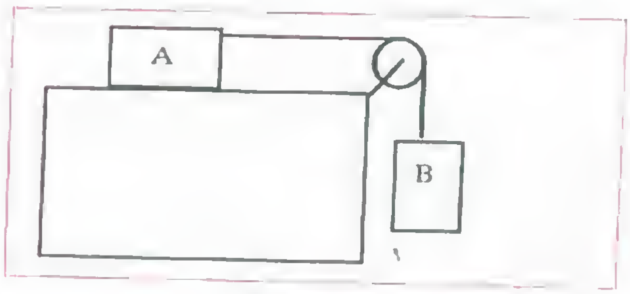


Figura. 3.62

10. Dos bloques A y B, tal y como lo indica la figura 3.63 se encuentran sobre una superficie sin rozamiento, donde $m_A = 8$ Kg y $m_B = 16$ Kg. Si son arrastrados sobre la superficie hacia la derecha con una aceleración constante de 0,5 m/s^2. Calcular: a) La fuerza F aplicada. b) La tensión de las cuerdas.

R: a) 12 N; b) 4 N.

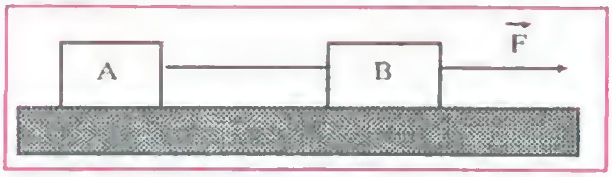


Figura. 3.63

11. Resolver el problema N° 9 suponiendo que la fuerza de roce que actúa es de módulo 5 N.

R: a) 1.63 Kg. b) 18,46 N. c) 15,97 N.

12. Un cuerpo de masa 40 Kg se mueve sobre una superficie cuyo coeficiente de rozamiento es 0,6 bajo la acción de una fuerza F, la cual forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuál debe ser el valor de dicha fuerza para que al aplicarla el cuerpo recorra 40 m en 4 s?.

R: 375,2 N

13. En la figura 3.64, por la acción del cuerpo B de masa 5 Kg, el bloque A de masa 6 Kg asciende sobre el plano con movimiento uniforme. Si el ángulo α es de 30°, calcular el coeficiente de rozamiento.

R: 0,38

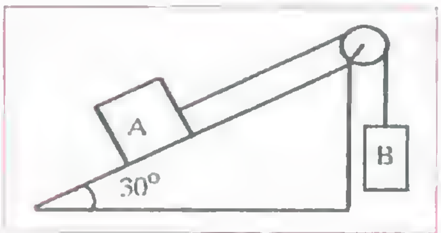


Figura 3.64

14. Dos cuerpos de masas $m_2 = 3$ Kg y $m_3 = 2$ Kg están situados sobre una mesa horizontal, y unidos a través de un hilo paralelo al plano de la mesa. Del extremo del hilo del cuerpo de masa m_2 y que pasa a través de una polea fija, cuelga otro cuerpo de masa $m_1 = 2$ Kg (fig. 3.65), determina: a) La aceleración del sistema. b) Las fuerzas de tensión del hilo entre el primer cuerpo y el segundo (T_1) y entre el segundo y el tercero (T_2).

R: 2,8 m/s²; b) 5,6 N; 14 N.

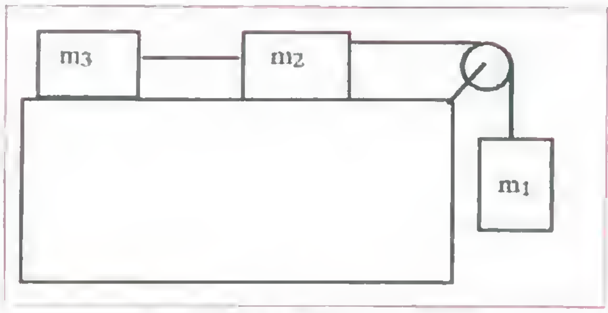


Figura 3.65

15. Resuelve el problema anterior suponiendo que el coeficiente de rozamiento es 0,2.

R: 1,4 m/s²; 16,8 N; 6,72 N.

16. De un hilo inextensible y de una masa despreciable, que pasa por una polea, también de masa despreciable, cuelgan dos cuerpos de masa $m_1 = 1$ Kg y $m_2 = 4$ Kg. Calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda en la figura. 3.66.

R: 5,88 m/s²; 15,68 N.

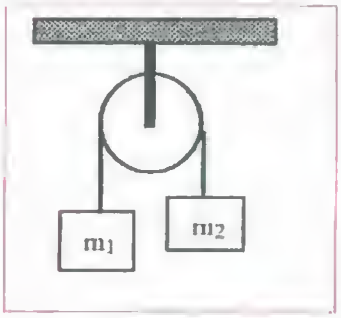


Figura 3.66

17 De un hilo inextensible, de masa despreciable, que pasa por una polea B, cuelga un bloque de masa $m_1 = 1$ Kg. De la polea móvil A se cuelga otro bloque de masa $m_2 = 4$ Kg, tal y como lo muestra la figura 3.67 Determina la aceleración de los bloques y la tensión del hilo sabiendo que se desprecia el peso de las poleas. Supóngase además que $a_1 = 2\,a_2$ y úsese $g = 9,8\ m/s^2$

R: $a_1 = 4,9\ m/s^2$; $a_2 = 2,45\ m/s^2$; 14,7 N

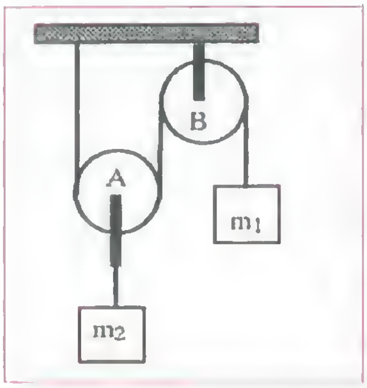


Figura. 3.67

18. Por un camino horizontal, como lo indica la figura 3.68, se hala una caja de masa 30 Kg con una fuerza de 100 N. La fuerza se aplica a través de una cuerda que forma un ángulo $\alpha = 60^o$ con el plano horizontal. Si el coeficiente de fricción es 0,12, calcular: a) La aceleración del sistema. b) La distancia que recorrerá la caja al cabo de 10 s de aplicada la fuerza, si estaba en reposo.

R: 0,837 m/s^2; 41,85 m

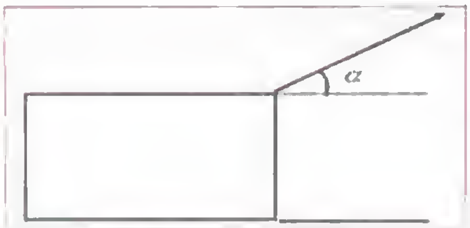


Figura 3.68

19. De uno de los extremos de un hilo que pasa a través de una polea fija cuelga una carga de masa m_1 = 2 Kg sobre la cual se ha colocado una sobrecarga de masa m_2 = 0,5 Kg (fig. 3.69). ¿Qué aceleración le puede imprimir a las cargas una fuerza F = 30 N, la cual está aplicada en el extremo libre del hilo y dirigida verticalmente hacia abajo?. ¿Cuál será la tensión del hilo?.

R: 2,2 m/s^2; 30 N.

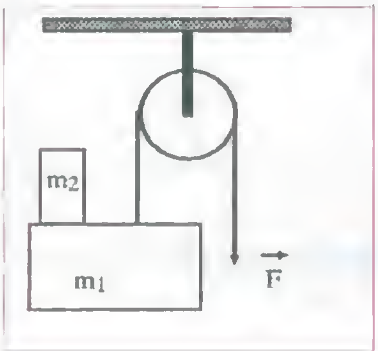


Figura 3.69

20. Desde lo alto de un plano inclinado que tiene una altura de 10 m y un ángulo con respecto a la horizontal de 30^o, se desliza un cuerpo. Determinar: a) La velocidad del cuerpo al final de su recorrido por el plano. b) El tiempo de duración del movimiento. Nota: el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano es 0,1.

R: a) 12,7 m/s. b) 2,98 s

21. En la figura. 3.70 se muestran dos masas: m_1 = 800 g y m_2 = 300 g. Si el sistema parte del reposo, calcular la distancia recorrida por m_1 y m_2 al cabo de 4 s de movimiento.

R: 57,04 m.

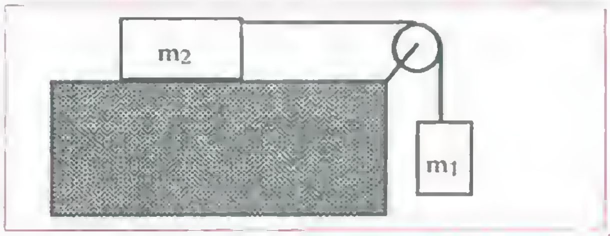


Figura. 3.70

22. En la figura 3.71 se muestran tres bloques A, B y C. Si las masas de los bloques A y B son respectivamente 5 Kg y 8 K g. ¿cuánto debe valer el peso del bloque C para que la aceleración del sistema sea 3 m/s^2?. ¿Cuál es la tensión de cada cuerda. No considere el rocc.

R: 91,5 N; 63,48 N; 39,48 N.

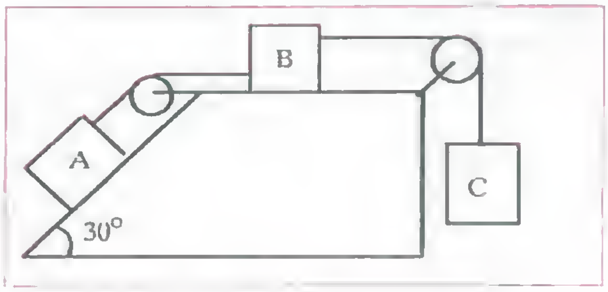


Figura. 3.71

23. En la fig. 3.72 se tiene que m_2 = 0,15 Kg y m_3 = 0,05 Kg, de manera tal que (m_2 + m_3) es menor que m_1. Si las cargas se mueven con una aceleración de 2 m/s^2, calcular: a) La masa m_1. b) La tensión del hilo.

R: a) 0,30 Kg. b) 2,34 N.

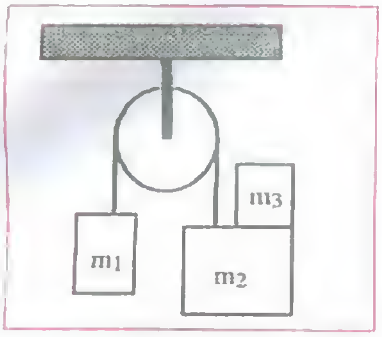


Figura. 3.72

24. Un cuerpo de masa $m_1 = 80$ Kg está unido a otro cuerpo de m_2 que pasa por una polea como lo indica la figura 3.73. El cuerpo de masa m_2 se desliza hacia la derecha con una aceleración de 0,2 m/s^2. Calcular: a) El valor de P_2. b) La tensión del hilo.

R: a) 144,9 N. b) 694,96 N

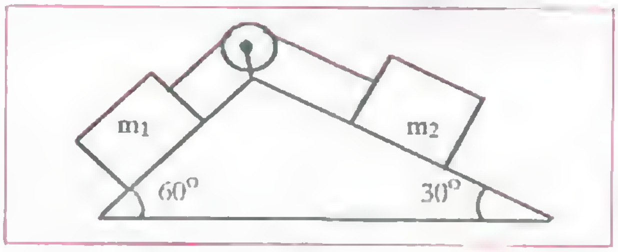


Figura. 3.73

25. Se tiene un cuerpo de masa 18 Kg sobre un plano inclinado con un ángulo α. ¿Cuál debe ser el máximo valor de α para que el cuerpo no se desplace, sabiendo que el coeficiente de roce es 0,4. ¿Cuál es la reacción del plano sobre el cuerpo?.

R: 21° 48' 5" ; 163,8 N.

26. En la figura 3.74 se muestra un cuerpo de masa $m_1 = 12$ Kg sobre el que actúa una fuerza F de 20 Kp. Si el sistema se mueve con una aceleración de 1,5 m/s^2, calcular: a) El valor de m_2. b) La tensión de la cuerda.

R: a) 15,77 Kg. b) 178,2 N.

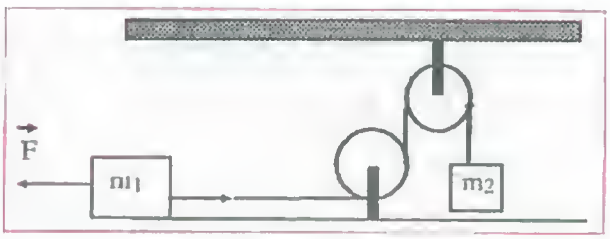


Figura. 3.74

27. En la figura 3.75 se muestran dos cuerpos de masas $m_1 = 0,8$ Kg y $m_2 = 0,6$ Kg que cuelgan de una cuerda. ¿Cuáles son las tensiones de las cuerdas?.

R: 13,72 N. ; 5,88 N.

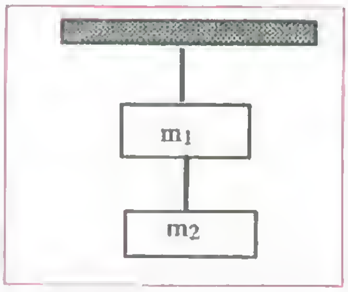
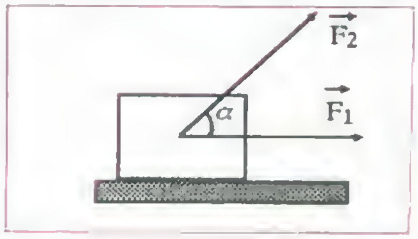


Figura. 3.75

28. En la figura 3.76 se muestra un cuerpo de masa m = 200 Kg actuando sobre él dos fuerzas: una horizontal hacia la derecha de módulo 12 Kp, y otra de módulo 18 Kp que forman un ángulo de 60° con la primera. Si partiendo del reposo se pone en movimiento durante 5 s, calcular: a) La aceleración del movimiento. b) La rapidez que lleva. c) La distancia que recorre.

R: a) 1,028 m/s^2. b) 5,14 m/s. c) 12,85 m.

Figura 3.76



29. En la figura 3.77 se muestra un móvil de masa 12 Kg sobre el cual están actuando varias fuerzas $F_1 = 48$ N; $F_2 = 60$ N y $F_3 = 30$ N. Calcular: a) La aceleración con la cual se movería el sistema, suponiendo que el roce es nulo. b) La distancia que recorrería después de 8 s de movimiento, conociendo que ha partido del reposo. c) La rapidez que tendría en ese momento.

R: a) 1,53 m/s^2, b) 48,96 m. c) 12,24 m/s

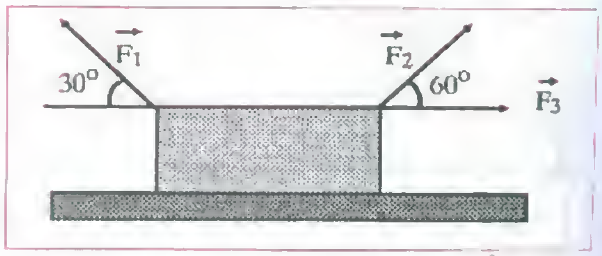


Figura. 3.77

30. En la figura 3.78 se muestran tres bloques A, B y C. Las masas de los bloques A y B son $m_a = 1,2$ Kg; $m_b = 12$ Kg. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque B y la superficie horizontal es 0,1. Calcular: a) La masa del bloque C sabiendo que la aceleración es 1,5 m/s^2 hacia la derecha. b) La tensión en cada cuerda. c) La fuerza que el plano ejerce sobre el bloque B.

R: 5,22 Kg; 43,33 N; 13,56 N; 117,6 N.

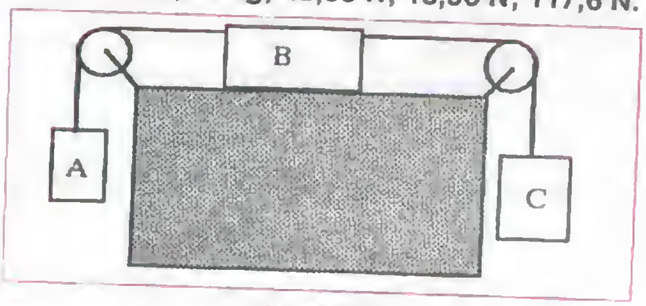


Figura. 3.78

31. En la figura 3.79, ¿qué magnitud debe tener la fuerza F para hacer ascender un bloque que pesa 150 N sobre un plano inclinado 60°, sabiendo que el coeficiente de roce es 0,3 y la aceleración es 1,4 m/s^2?.

R: 174,72 N

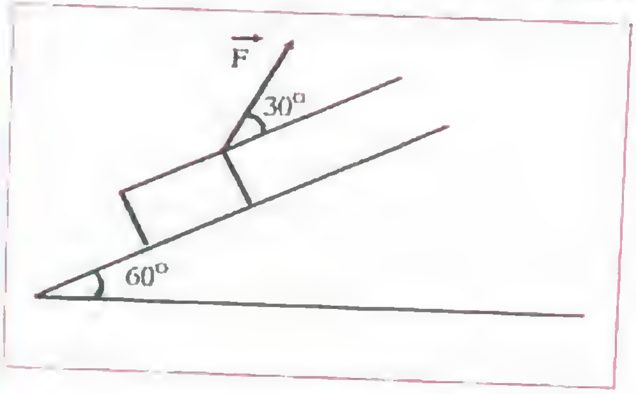


Figura. 3.79

32. Un bloque de masa $m_1 = 8$ Kg está sobre el plano inclinado de la figura 3.80 unido a través de una polea a otro cuerpo de masa $m_2 = 5$ Kg. Si no se considera el coeficiente de roce, ¿qué valor de α hace que el sistema se mueva hacia la derecha con velocidad constante?. ¿Qué valor de α hace que el sistema se mueva con aceleración de 1,5 m/s^2?.

R: 38° 40' 55" ; 22° 6' 11"

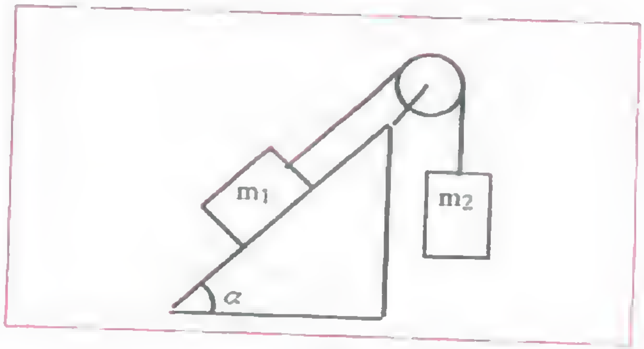


Figura. 3.80

33. En la figura 3.81, $m_1 = 40$ Kg y $m_2 = 60$ Kg. Calcular el alargamiento del resorte, suponiendo que el coeficiente de roce es 0,6 y la constante de elasticidad 3920 N/m.

R: 0,096 m

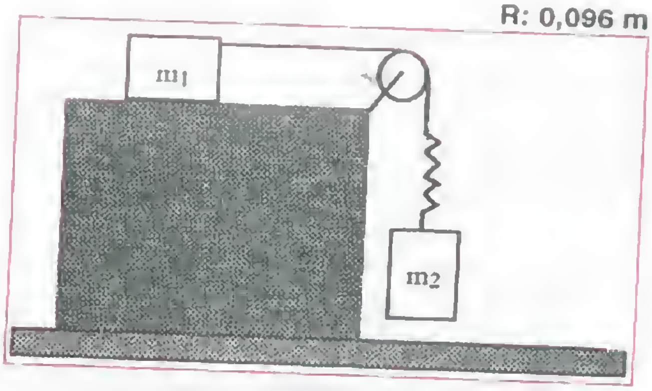


Figura. 3.81

34. En la figura 3.82, $m_1 = 100$ Kg; $m_2 = m_3 = 50$ Kg; $m_4 = 400$ Kg. Calcular el alargamiento del resorte es 600 Kp/m y el coeficiente de rozamiento del plano horizontal es 0,8.

R: 0,32 m

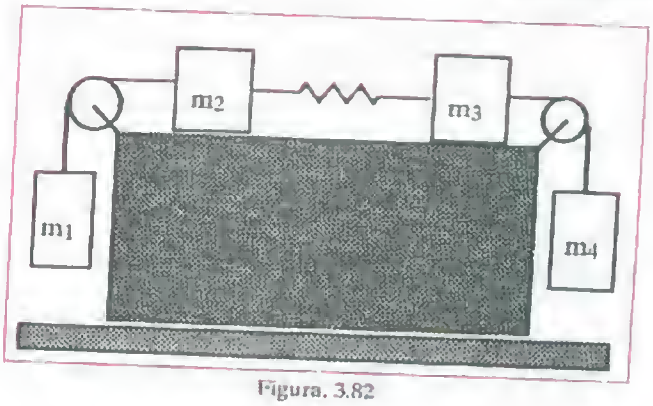


Figura. 3.82

35. En la figura 3.83, P_1 = 141,42 Kp P_2 = 40 Kp. Si se supone que no hay rozamiento, calcular el alargamiento de los resortes sabiendo que la constante de elasticidad es 500 Kp/m.

R: 0,1576 m

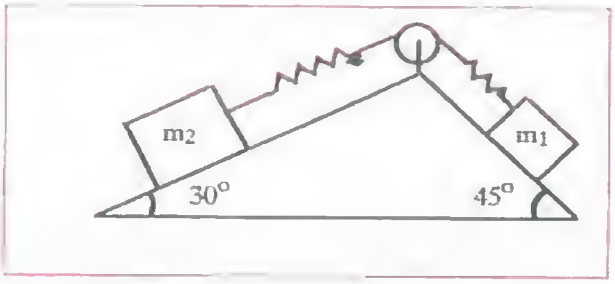


Figura. 3.83

3.12 Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Impulso

- Cuando con un palo se golpea una pelota de golf, ésta recibe un impulso, poniéndose en movimiento.
- En el béisbol, cuando un bateador le hace swing a una pelota, ésta es conectada por haber recibido un impulso, logrando que la misma se ponga en movimiento.
- Cuando un balón de fútbol recibe un puntapié de un futbolista, se pone en movimiento por habérsele proporcionado un impulso.

Nótese en los ejemplos anteriores, que actúa una fuerza en un intervalo de tiempo ($\Delta t = t_2 - t_1$) muy pequeño y debido a la acción instantánea de la fuerza el cuerpo ha pasado del estado de reposo al estado de movimiento, recibiendo lo que se llama un **impulso**.

Supongamos que sobre una masa m actúa una fuerza F durante un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

El impulso I viene dado por la expresión:

$$\boxed{I = F.\Delta t}$$

Como puede notarse, el impulso es una magnitud vectorial, por ser el producto de la magnitud vectorial fuerza y la magnitud escalar tiempo. Su dirección y sentido serán los mismos de la fuerza que la produce.

De acuerdo a lo anterior podemos definir:

El impulso de una fuerza es un vector cuyo módulo es igual al producto del módulo de la fuerza aplicada a un cuerpo por el intervalo de tiempo que actúa y cuya dirección y sentido coincide con la dirección y sentido de la fuerza.

$$|I| = |F|.\Delta t$$

Esto también puede escribirse sin usar módulos así:

$$I = F.\Delta t$$

*** Unidades del impulso**

Por ser el producto de una fuerza por un intervalo de tiempo, el impulso se mide en las unidades siguientes:

Sistema	Unidad
M.K.S.	N . s
c.g.s.	Dina . s

Cantidad de movimiento o momento lineal

La cantidad de movimiento o momento lineal de un cuerpo es la magnitud vectorial medida por el producto de la masa de un cuerpo y la velocidad que adquiere.

Si representamos por P a la cantidad de movimiento podemos escribir que:

$$P = m.V$$

en donde:

P: es la cantidad de movimiento.

m: es la masa del cuerpo

V: es la velocidad

La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial que tendrá la misma dirección y sentido de la velocidad de la partícula.

Las unidades de la cantidad de movimiento se muestran a continuación:

Sistema	Unidad
M.K.S.	Kg . m/s
c.g.s	g . m/s

*** Variación en la cantidad de movimiento**

Si ocurre un cambio en la masa, en la velocidad, o en ambas a la vez, existirá un cambio en la cantidad de movimiento del cuerpo considerado.

Si la masa permanece constante pero la velocidad del cuerpo cambia de V_1 a V_2, se tendrá que:

$P_1 = m \cdot V_1$ (en el primer instante)

$P_2 = m \cdot V_2$ (en el segundo instante)

La variación de la cantidad de movimiento será:

$P_2 - P_1 = m.V_2 - m.V_1$

Tomando factor común "m" se tiene que:

$P_2 - P_1 = m\,(V_2 - V_1)$

Si en la ecuación anterior hacemos:

$V_2 - V_1 = \Delta V$

$P_2 - P_1 = \Delta P$

nos queda que:

$$\boxed{\Delta P = m \cdot \Delta V}$$

*** Relaciones entre el impulso y la cantidad de movimiento**

Supóngase que una partícula de masa m se está moviendo con una velocidad V_1 y que una fuerza **F**, constante, actúa sobre una partícula durante un intervalo de tiempo Δt proporcionándole una velocidad V_2, como lo indica la figura 3.84.

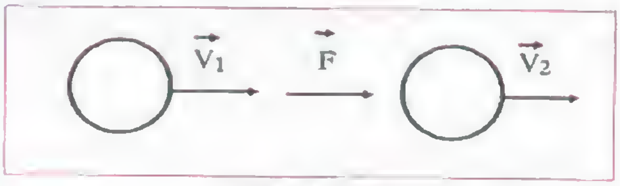


Figura. 3.84

De acuerdo con la segunda ley de Newton podemos escribir que:

$F = m \cdot a$

Pero la aceleración "a" viene dada por:

$$a = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_2} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad \text{Luego}$$

$$F = m.\ \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta V$

Pero $F \cdot \Delta t = I$ y $m.\Delta V = \Delta P$

luego, $\boxed{I = \Delta P = P_2 - P_1}$

De todo esto podemos concluir diciendo que:

El impulso resultante sobre una partícula durante cierto intervalo de tiempo es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula.

Este enunciado también es conocido con el nombre de **Teorema del Impulso y de la Cantidad de Movimiento.**

Ejemplo 1:

Con un taco se golpea una bola de billar que está en reposo y se ejerce sobre ella una fuerza promedio en dirección horizontal y sentido hacia la derecha de 30 N, en un intervalo de tiempo de 10 milisegundos. Si la bola tiene una masa de 0,2 Kg. ¿Cuál es la velocidad después del impacto?

Solución

Datos:

$F = +30$ N
$\Delta t = 10$ milisegundos
$= 10 \,.\, 10^{-3}$ s
$= 10^{-2}$ s
$m = 0{,}2$ Kg
$V_1 =$
$V_2 = ?$

Sabemos que $F.\Delta t = m.\Delta V$, que también puede escribirse como:

$F.\Delta t = m\,(V_2 - V_1)$

$30N.10^{-2}\ s = 0{,}2\ Kg(V_2 - 0)$

$30.10^{-2}\ N.s = 0,2\ Kg.V_2$

Despejando a V_2

$$V_2 = \frac{30.10^{-2}\ N.s}{0,2\ Kg}$$

Descomponiendo el Newton en sus unidades para proceder a simplificarlas, nos queda así:

$$V_2 = 1,5\ \frac{Kg\ m/s^2.s}{Kg}$$

$$V_2 = +1,5\ m/s$$

Ejemplo 2

En un juego de béisbol un pither tiene una pelota de 120 g, la cual lanza hacia el home con una velocidad de 20 m/s. Dicha pelota recibe un batazo con una fuerza horizontal de 50 Kp en sentido opuesto al del lanzamiento. Si la fuerza actúa en un intervalo de tiempo de 0,02 s. Calcular la velocidad con que sale la pelota del bate y en qué sentido.

Solución

Se hacen las transformaciones necesarias.

Datos:

$$\begin{aligned} m &= 120\ gr \\ &= 120 . 10^{-3} \\ &= 1,2 . 10^{-1} Kg \\ V_1 &= +20\ m/s \\ F &= -50\ Kp \\ &= -50.9,81\ N \\ &= 490,5\ N \\ t &= 0,02\ s \\ V_2 &= ? \end{aligned}$$

Usemos la ecuación:

$$F.\Delta t = m.\Delta v$$

$$F.\Delta t = m(V_2 - V_1)$$

$$V_2 = \frac{F.\Delta t}{m} + V_1$$

Sustituyendo valores:

$$V_2 = \frac{-450,5N.0,02\ s}{1,2.10^{-1}\ Kg} + 20\ m/s$$

$$V_2 = -61,75\ m/s$$

El sentido es hacia la izquierda, por ello el signo es negativo.

Principio de conservación de la cantidad de movimiento

A continuación estudiaremos otras leyes de conservación de gran importancia en la física. Para ello comenzaremos analizando el proceso de interacción entre dos cuerpos.

–Para deducir el enunciado de este principio partiremos de la tercera ley de Newton (ley de acción y reacción).

Consideremos dos esferas de masa m_1 y m_2, las cuales se hallan dotadas inicialmente de velocidades V_1 y V_2 respectivamente. Ellas chocan frontalmente como se ilustra en la figura 3.85.

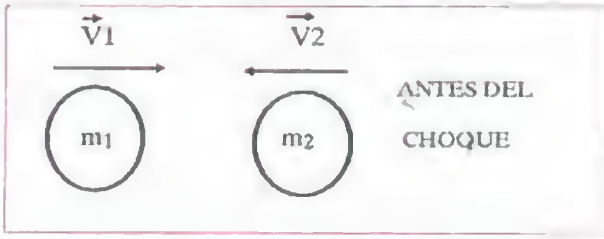


Figura. 3.85

Al chocar, las nuevas velocidades serán V'_1 y V'_2 respectivamente (figura. 3.86)

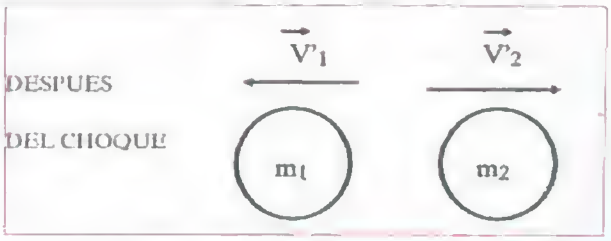


Figura. 3.86

Como las esferas están en contacto mutuo durante un intervalo de tiempo Δt muy pequeño, el impulso $F_1.\Delta t$ debe ser igual y opuesto al impulso $F_2.\Delta t$, pudiéndose escribir que:

$F_1.\Delta t = -F_2.\Delta t$ ....(1)

Nosotros sabemos que:

$F_1.\Delta t = m_1(V'_1 - V_1)$ ....(2)

$$-F_2.\Delta t = m_2(V'_2 - V_2) \quad ....(3)$$

Sustituimos (2) y (3) en (1). De esta manera nos queda la expresión:

$$m_1(V'_1 - V_1) = -m_2(V'_2 - V_2).$$

Aplicando propiedad distributiva se tiene:

$$m_1V'_1 - m_1V_1 = - m_2V'_2 + m_2V_2$$

Transponiendo términos nos queda:

$$m_1V'_1 + m_2V'_2 = m_1V_1 + m_2V_2$$

Las cantidades de movimiento después del choque son:

$$m_1V'_1 = P'_1$$

$$m_2V'_2 = P'_2$$

Las cantidades de movimiento antes del choque son:

$$m_1V_1 = P_1$$

$$m_2V_2 = P_2$$

Luego,

$$\boxed{\begin{gathered} P'_1 + P'_2 = P_1 + P_2 \\ P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2 \end{gathered}}$$

El primer miembro representa la suma de las cantidades de movimiento antes del choque, y el segundo miembro representa la suma de las cantidades de movimiento después del choque.

En un sistema aislado, la suma de las cantidades de movimiento antes de la interacción es igual a la suma de las cantidades de movimiento inmediatamente después de la interacción.

Se entiende por **sistema aislado** al sistema constituido por dos o más cuerpos donde las únicas fuerzas que actúan sobre ellos son sus interacciones mutuas.

Como hemos podido notar, la ley de conservación de la cantidad de movimiento es una consecuencia de la tercera ley de Newton, pero más general que ésta. La ley de conservación de la cantidad de movimiento es aplicable en todas las situaciones experimentales.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento es también aplicable a sistemas no aislados, pero bajo dos condiciones:

a) Ella se conserva para un sistema no aislado si la suma de todas las fuerzas externas es igual a cero. **Las fuerzas externas** son las fuerzas que actúan sobre las partículas y que proceden del exterior del sistema.

b) Si la componente de la fuerza neta externa en alguna dirección es cero, trae como consecuencia que la componente de **P** en esa dirección se conserva.

Ejemplo:

Una esferita de masa de 1,2 Kg se desplaza hacia la derecha con una velocidad de 4 m/s y choca con otra esferita de 1,5 Kg que se desplaza hacia la izquierda con una velocidad de 5 m/s. Después del choque, la primera se desplaza hacia la izquierda con una velocidad de 2 m/s. ¿Con qué velocidad se desplaza la segunda?.

Solución

$$\boxed{\begin{aligned} m_1 &= 1{,}2\ Kg \\ m_2 &= 1{,}5\ Kg \\ V_1 &= +\ 4\ m/s \\ V_2 &= -\ 5\ m/s \\ V'_1 &= -\ 2\ m/s \\ V'_2 &= \ ? \end{aligned}}$$

Nótese que los movimientos a la derecha tienen velocidad positiva, y los movimientos hacia la izquierda tienen velocidad negativa. Si aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento, se tendrá que:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V'_1 + m_2V'_2$$

Sustituyendo valores y signos se tiene:

$$1{,}2Kg.4m/s + 1{,}5Kg(-5\ m/s) = 1{,}2Kg(-2\ m/s) + 1{,}5Kg.V'_2$$

$$4{,}8Kg\ .\ m/s - 7{,}5Kg\ .m/s = -2{,}4Kg.m/s + 1{,}5Kg.V'_2$$
$$-\ 2{,}7\ Kg\ .\ m/s = -2{,}4Kg.m/s + 1{,}5Kg.V'_2$$
$$-\ 2{,}7Kg.m/s + 2{,}4Kg.m/s = 1{,}5\ Kg.V'_2$$
$$-\ 0{,}3\ Kg\ .\ m/s = 1{,}5\ Kg.V'_2$$

Despejando V'_2 se tiene que:

$$V'_2 = \frac{-0{,}3Kg.m/s}{1{,}5Kg}$$

$$V'_2 = -0{,}2\ m/s$$

El signo negativo significa que se desplaza después del choque hacia la izquierda con una velocidad de 0,2 m/s.

Cantidad de movimiento de un sistema de partículas.

Un **sistema de partículas** es un conjunto de partículas dotadas de alguna característica común que permita delimitarlo y en el que la posición y movimiento de una partícula depende de la posición y movimiento de las demás.

También puede definirse como el conjunto de cuerpos perfectamente delimitados en el que el movimiento de uno ejerce influencia en el movimiento de los demás.

Un sistema de partículas puede ser **discreto** y **continuo.**

Un sistema es discreto cuando está constituido por un número finito de partículas, estando éstas localizadas. Una polea y los bloques que penden de la cuerda que pasa por la garganta de la polea es un sistema de tres partículas que constituyen un sistema discreto.

En un sistema discreto la suma de las masas de todas las partículas que lo constituyen es la masa total del sistema.

Un sistema es continuo cuando las partículas que lo constituye no se pueden delimitar, ya que el número de partículas deja de ser finito. Las partículas de una masa de agua constituyen un sistema continuo.

- **Fuerzas internas** son las que se ejercen entre sí las partículas de un sistema.
- **Fuerzas externas** son las que ejercen agentes externos al sistema.

Consideremos un sistema de tres partículas cuyas masas son: m_1, m_2 y m_3 tales que se ejerzan **fuerzas internas** entre sí.

La cantidad de movimiento para cada una de ellas es:

$$P_1 = m_1.V_1$$

$$P_2 = m_2.V_2$$

$$P_3 = m_3.V_3$$

La cantidad de movimiento total del sistema **P** vendrá dada por la suma vectorial de las cantidades de movimiento de cada una de las partículas, pudiéndose escribir que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

Si nos referimos a un sistema de coordenadas rectangulares, las componentes del vector **P** sobre los ejes vienen dadas por:

$$P_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x}$$

$$P_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y}$$

Observaciones

> Debemos recordar que los signos de las componentes de las cantidades de movimiento dependen de su orientación con respecto al marco referencial seleccionado. Las que están orientadas en la misma dirección del eje respectivo, son positivas y las que están orientadas en dirección opuestas son negativas.

La magnitud de la cantidad de movimiento total del sistema viene dada por:

$$P = \sqrt{(P_x)^2 + (P_y)^2}$$

Ejemplo

En la figura 3.87 se muestran tres partículas de masas $m_1 = 2Kg$, $m_2 = 5\ Kg$ y $m_3 = 4\ Kg$, que se desplazan con velocidades $V_1 = +3\ m/s$, $V_2 = +1\ m/s$ y $V_3 = -2\ m/s$. Calcular la cantidad de movimiento total del sistema.

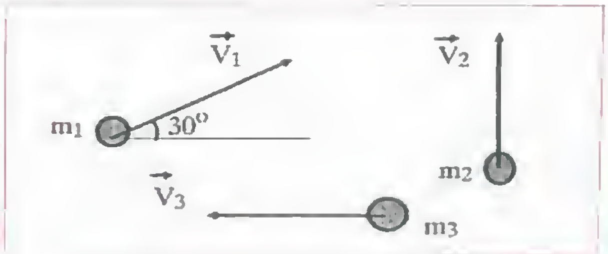


Figura. 3.87

Datos:

$$V_1 = +3\ m/s$$
$$V_2 = +1\ m/s$$
$$V_3 = -2\ m/s$$

Solución

Las magnitudes de cada una de las componentes vienen dadas por:

$P_1 = m_1V_1$

$= 2Kg.(+3\ m/s)$

$\boxed{P_1 = +6Kg.m/s}$

$P_2 = m_2V_2$

$\boxed{P_2 = 5\ Kg.m/s}$

$P_3 = m_3V_3$

$= 4\ Kg.(+2\ m/s)$

$\boxed{P_3 = +8\ Kg.m/s.}$

Ubiquemos ahora los vectores sobre los ejes coordenados (figura 3.88) y calculemos las magnitudes de las componentes sobre los ejes.

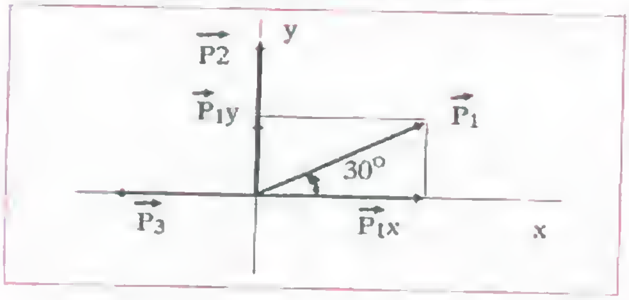


Figura. 3.88

$P_x = P_{1x} - P_3$

$= P_1 \cos 30^o - P_3$

$= 6\ Kg.m/s.\cos 30^o - 8\ Kg.m/s$

$\boxed{P_x = -2{,}81\ Kg.m/s}$

$P_y = P_{1y} + P_2$

$= P_1 \operatorname{sen} 30^o + 5\ Kg.m/s$

$= 6\ Kg.m/s.\operatorname{sen}30^o + 5\ Kg.m/s$

$\boxed{P_y = 8\ Kg.m/s}$

La magnitud de **P** es la cantidad de movimiento total del sistema (figura 3.89).

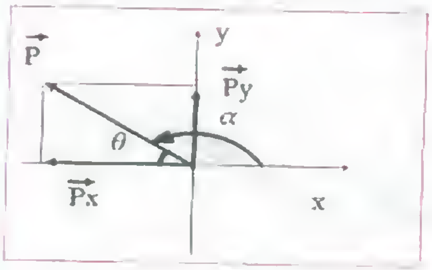


Figura 3.89

La calculamos así:

$$P = \sqrt{Px^2 + Py^2}$$

$$P = \sqrt{(-2{,}81\ Kg.m/s)^2 + (8\ Kg.m/s)^2}$$

$P = 8{,}5\ Kg.m/s$

La dirección la obtenemos a través de:

$$\tan\theta = \frac{Py}{Px} = \frac{8\ Kg.m/s}{-2{,}81\ Kg.m/s}$$

$\theta = 70^o\ 38'\ 46''$

$\alpha = 180^o - \theta$

$\alpha = 180^o - 70^o\ 38'\ 46''$

$\alpha = 109^o\ 21'13''$

Choques o colisiones

Un choque o colisión es un fenómeno de interacción intensa entre dos o más cuerpos, en que al menos uno de ellos está en movimiento durante un intervalo de tiempo relativamente corto.

Para que haya la colisión no es necesario que entren en contacto las partículas, siendo éste el caso de las interacciones nucleares.

Un choque frontal o unidimensional ocurre cuando las partículas que colisionan se mueven a lo largo de una misma recta, antes y después de la interacción. Puede estudiarse escalarmente.

Un choque es oblicuo o lateral cuando las partículas o los cuerpos que colisionan se mueven en direcciones distintas, antes y después de la interacción.

Tanto en las colisiones frontales como en las oblicuas o bidimensionales se pueden presentar tres tipos de colisiones según se conserve o no la energía cinética. En ambas siempre se conserva la cantidad de movimiento.

Estos tipos de colisiones son:

* **Las colisiones elásticas**, son aquellas en las cuales se conservan la energía cinética y la cantidad de movimiento. En este caso no se produce ninguna deformación permanente de los cuerpos que chocan o no se genera calor.

* **Las colisiones inelásticas**, son aquellas en las cuales se conserva la cantidad de movimiento pero

no la energía cinética, la cual puede aumentar o disminuir. En este caso se produce una deformación permanente.

* **Las colisiones perfectamente inelásticas** en las cuales, además de conservarse la cantidad de movimiento, las partículas o cuerpos quedan unidos como resultado de la colisión y continúan moviéndose a una velocidad común.

Mas adelante, cuando estudiemos la conservación de la energía cinética, haremos un estudio detallado de los choques elásticos. Por el momento estudiaremos el choque inelástico y perfectamente inelásticos.

Estudio de los choques inelásticos.

Problema 1

Caso de un choque directo perfectamente inelástico.

Un automóvil de 3000 Kg. rueda a una velocidad de 1,4 m/s sobre un plano horizontal y choca con otro automóvil de masa 6000 Kg. que está en reposo con los frenos sueltos. Si ambos automóviles continúan juntos, calcular la velocidad después del choque.

Datos

$m_1 = 3000$ Kg.
$m_2 = 6000$ Kg.
$V_2 = 0$ m/s
$V_c = ?$

Solución

De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento se tiene que **la suma de las cantidades de movimiento antes del choque es igual a la suma de las cantidades de movimiento después del choque.**

De acuerdo a esto puede escribirse que:

$$m_1.V_1 + m_2.V_2 = m_1.V_c + m_2.V_c$$

Sacando factor común en el segundo miembro nos queda:

$$m_1.V_1 + m_2.V_2 = V_c(m_1 + m_2)$$

Como el automóvil de masa m_2 está inicialmente en reposo se tendrá que $V_2 = 0$, por lo que el producto $m_2.\ V_2 = 0$, quedándonos que:

$m_1.V_1 = V_c(m_1 + m_2)$, donde V_c es la velocidad común después del choque.

Despejando V_c se tiene que:

$$V_c = \frac{m_1.V_1}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo m_1, m_2 y V_1 por sus valores se tiene que:

$$V_c = \frac{3000\text{Kg}\ .\ 1{,}4\text{m/s}}{3000\text{Kg} + 6000\text{Kg}}$$

$$\boxed{V_c = +\ 0{,}46\ \text{m/s}}$$

Problema 2

Choque inelástico en dos dimensiones

Un automóvil de masa $m_1 = 2500$Kg viaja hacia el norte con una velocidad de 20 m/s. Otro automóvil de masa $m_2 = 1500$ Kg viaja hacia el este con una velocidad de 25 m/s. Ellos chocan en la intersección y después del choque el automóvil de masa m_1 se mueve con una velocidad de 15 m/s, formando un ángulo de 30° con la dirección positiva del eje x. Calcular la velocidad del automóvil de masa m_2 después del choque.

Solución

En la figura 3.90 se muestran las condiciones del problema antes de la interacción y en la figura 3.91 las condiciones después de la interacción.

Apliquemos el principio de conservación de la de la cantidad de movimiento en cada una de las direcciones de los ejes coordenados.

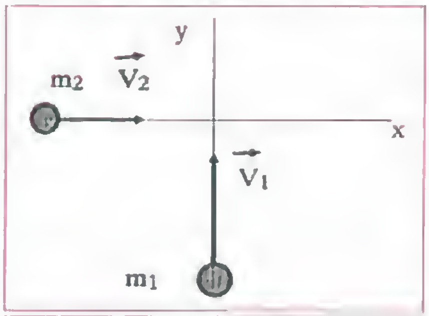


Figura 3.90

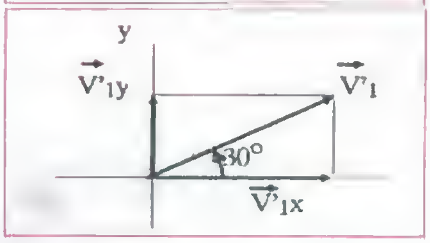


Figura 3.91

Sobre el eje x

$P_{1x} + P_{2x} = P'_{1x} + P'_{2x}$

$P_{1x} = 0$ porque m_1 no tiene componentes sobre el eje x antes de la interacción, pudiéndose escribir que:

$0 + m_2.V_{2x} = m_1.V'_{1x} + m_2.V'_{2x}$

$m_2V_{2x} = m_1.V'_1.\cos 30^o + m_2.V'_{2x}$

$1500Kg.25m/s = 2500Kg15m/s\cos30^o + 1500KgV'_{2x}$

$37500Kg.m/s = 32475{,}95Kg.m/s + 1500Kg.V'_{2x}$

$37500Kg.m/s - 32475{,}95Kg.m/s = 1500Kg.V'_{2x}$

Despejando V'_{2x} se tiene:

$$V'_{2x} = \frac{5024{,}05Kg.m/s}{1500Kg}$$

$$\boxed{V'_{2x} = 3{,}35m/s}$$

Sobre el eje y

$P_{1y} + P_{2y} = P_{1y} + P_{2y}$

$P_{2y} = 0$ porque m_2 no tiene componentes sobre el eje "y" antes de la interacción, pudiéndose escribir que:

$m_1.V_{1y} = m.V'_{1y} + m_2.V'_{2y}$

$m_1V_{1y} = m_1.V'_1.\text{sen } 30^o + m_2.V'_{2y}$

$2500Kg.20m/s = 2500Kg.15m/s.\text{sen}30^o + 1500Kg.V'_{2y}$

$50000Kg.m/s = 18750Kg.m/s + 1500Kg.V'_{2y}$

$50000Kg.m/s - 18750Kg.m/s = 1500Kg.V'_{2y}$

$$V'_{2y} = \frac{31250\ Kg.m/s}{1500Kg}$$

$$\boxed{V'_{2y} = 20{,}83\ m/s}$$

La magnitud de la velocidad del cuerpo de masa m_2 después del choque será:

$$V'_2 = \sqrt{(V'_{2x})^2 + (V'_{2y})^2}$$

$$V'_2 = \sqrt{(3{,}35m/s)^2 + (20{,}83\ m/s)^2}$$

$$\boxed{V'_2 = 21{,}09\ m/s}$$

La dirección y el sentido de la velocidad del cuerpo de masa m_2 después del choque será: (figura 3.92)

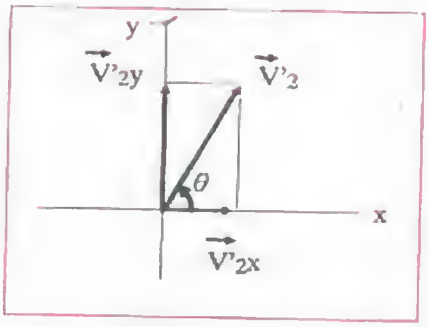


Figura 3.92

$$\tan\theta = \frac{|V'_{2y}|}{|V'_{2x}|}$$

$$\tan\theta = \frac{20{,}83\ m/s}{3{,}35\ m/s}$$

$$\theta = 80^o\ 51'\ 49''$$

Problema 3

Se tiene un carrito cuya masa es de 0,5 Kg, desplazándose hacia la derecha sobre una superficie horizontal sin rozamiento, con una velocidad de 2 m/s. Calcular: a) ¿Qué valor debe tener una masa que se deja caer sobre el carrito para que la velocidad del conjunto (masa del carrito más la masa desconocida) se desplace con una velocidad de 1 m/s?. b) ¿Cuál es el valor de la cantidad de movimiento del carrito después del choque?. d) ¿Cuál es el valor de la variación de la cantidad de movimiento del carrito?.

Datos

$m_1 = 0{,}5$ Kg
$V_1 = +2$ m/s
$m_2 = ?$
$V_c = +1$ m/s
$P_1 = ?$
$P = ?$

V_c : es la velocidad del conjunto

m_2 : es la masa desconocida

P_1 : cantidad de movimiento del carrito antes del choque

P'_1 : cantidad de movimiento del carrito después del choque

Solución:

a) La cantidad del movimiento del carrito antes de colocarle el cuerpo de masa desconocida es:

$m_1 V_1$

La cantidad de movimiento del carrito más la masa desconocida es:

$(m_1 + m_2).V_c$, siendo V_c la velocidad del conjunto.

De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento, se tiene que la cantidad de movimiento antes del choque, $m_1.V_1$ es igual a la cantidad de movimiento después del choque $(m_1 + m_2).V_c$, pudiéndose escribir que:

$$m_1.V_1 = (m_1 + m_2).V_c$$

Como deseamos despejar a m_2, tenemos que:

$$m_1.V_1 = m_1.V_c + m_2.V_c$$

$$m_1.V_1 - m_1.V_c = m_2.V_c$$

Despejando m_2:

$$m_2 = \frac{m_1.V_1 - m_1.V_c}{V_c}$$

$$m_2 = \frac{0{,}5Kg.2\ m/s\ -\ 0{,}5Kg.1\ m/s}{1\ m/s}$$

$$m_2 = \frac{0{,}5\ Kg.m/s}{1\ m/s}$$

Simplificando unidades, nos queda:

$$m_2 = 0{,}5\ Kg$$

b) El valor de la cantidad de movimiento del carrito antes del choque viene dado por:

$$P_1 = m_1.V_1$$

$$= 0{,}5Kg.2\ m/s$$

$$= 1Kg.m/s$$

c) La cantidad de movimiento del carrito después del choque es:

$$P'_1 = m_1.V_c$$

$$= 0{,}5Kg.\ 1\ m/s$$

$$= +\ 0{,}5Kg\ .\ m/s$$

d) La variación de la cantidad de movimiento del carrito es:

$$\Delta P = P'1 - P1$$

$$= 0{,}5\ Kg.m/s - 1Kg.m/s$$

$$\Delta P = -0{,}5Kg.m/s$$

Problemas propuestos

1. Una pelota de béisbol cuya masa es 0,15 Kg es lanzada con una velocidad de 30 m/s y es bateada en sentido contrario al lanzamiento con una velocidad de 40 m/s. Calcular: a) El incremento de la cantidad de movimiento. b) El impulso del golpe. c) Si el intervalo de tiempo de contacto es 0,002 s, calcular la fuerza media del golpe.

R: a) 10,5Kg.m/s b) 10,5 Kg.m/sc) 52500 N

2. Se tienen dos patinadores de masas 40 Kg y 60 Kg, que se mueven en diferentes sentidos. El primero tiene una velocidad de 4 m/s y el segundo una velocidad de 2 m/s. Si chocan frontalmente y permanecen en contacto después del choque, calcular la velocidad final.

R: 2,8 m/s

3. Una esfera de masa 1 Kg cae verticalmente sobre el piso con una velocidad de 20 m/s y rebota con una velocidad de 10 m/s. Determinar: a)¿Qué impulso actúa sobre la esfera durante el contacto?. b) Si la esfera permanece en contacto durante 0,02 s, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida por el piso?.

R: a) -10 Kg.m/s b) -500 N

4. Un cuerpo que tiene una masa de 10 Kg se desplaza con una velocidad de 10 m/s y varía su velocidad uniformemente hasta 20 m/s en 3 s. a) ¿Qué impulso ha actuado?. b) ¿Cuál es la variación de la cantidad de movimiento?. c) ¿Cuál ha sido la fuerza que ha actuado?.

R: a) 100 Kg.m/s b) 100 Kg.m/sc) 33,3 N

5. Un automóvil cuya masa es 10000 Kg se desplaza con una velocidad de 0,9 m/s sobre un plano horizontal. Si otro automóvil se desplaza en sentido contrario, teniendo una masa de 20000 Kg. ¿Con qué velocidad se debe desplazar éste último para que después de la interacción ambos queden en reposo?.

R: - 0,45 m/s

6. Un martillo que tiene de masa 30 Kg se mueve con una velocidad de 10 m/s, golpea la cabeza de un clavo haciéndolo penetrar en un trozo de madera. Si el martillo se detiene en 0,0013 s. Calcular: a) El impulso realizado. b) la fuerza promedio.

R: a) 100 Kg.m/s b) 76923 N

7. Un taco golpea a una bola de billar ejerciéndose una fuerza promedio de 50 N durante un tiempo de 10 milisegundos. Si la masa de la bola es de 0,20 Kg. ¿Cuál fue la velocidad después del impacto?.

R: 2,5 m/s

8. Un trineo de 6 Kg de masa se está desplazando a través del hielo con una velocidad de 9 m/s. Un paquete de 12 Kg se deja caer verticalmente sobre él. Calcular: a) La variación de la cantidad de movimiento del trineo. b) La variación de la cantidad de movimiento del paquete. c) La cantidad de movimiento total.

R: a) -36 Kg.m/s b) 36 Kg.m/s c) 54 Kg.m/s

9. Dos esferas se desplazan una hacia el este con velocidad de 2 m/s y la segunda hacia el oeste con velocidad de 5 m/s. Después del choque la primera esfera se desplaza en la dirección original a 0,5 m/s. Calcular la velocidad de la segunda esfera después del choque, sabiendo que la masa de ésta es el doble de la primera.

R: - 4,27 m/s

10. Una plataforma de 10 Kg de masa se desliza sobre una superficie sin rozamiento, con una velocidad de 10 m/s. Si sobre ella se deja caer, desde una altura de 1 m, un cuerpo de masa 2 Kg, calcule: a) La cantidad de movimiento de la plataforma, antes de la interacción. b) La cantidad de movimiento de la masa de 2 Kg antes de la interacción. c) La velocidad del sistema plataforma y masa después de la interacción. d) La cantidad de movimiento de la plataforma después de la interacción. e) La variación de la cantidad de movimiento de la plataforma. f) La cantidad de movimiento de la masa de 2 Kg después de la interacción. g) La variación de la cantidad de movimiento de la masa de 2 Kg. Use g = 9,8 m/s.

R: a) 100 Kg.m/s b) 8,86 Kg.m/s c) 9,07 m/s

d) 90,7 Kg.m/s e) -9,3 Kg.m/s

f) 18,14 Kg.m/s g) 9,28 Kg.m/s

11) Un cuerpo de masa 1,8 Kg está en reposo. Sobre él actúa una fuerza determinada, proporcionándole una aceleración de 2 m/s. El movimiento adquirido le permite recorrer 50 m con dicha aceleración. ¿Cuál es la cantidad de movimiento cuando haya recorrido esa distancia?.

R: 25,452 Kg.m/s

12. Un cuerpo de 1 Kg de masa cae verticalmente sobre el suelo con una velocidad de 25 m/s y rebota con una velocidad de 10 m/s. a) ¿Qué impulso actuó sobre la pelota durante el contacto?. b)Si la pelota estuvo en contacto durante 0,020 segundos, ¿cuál fue la fuerza promedio ejercida sobre el suelo?.

R: a) - 35 Kg.m/s b) -1750 N

13. Una esfera de masa $m_1 = 3$ Kg se mueve horizontalmente con una velocidad de 10 m/s y choca con una esfera de masa $m_2 = 5$ Kg que está en reposo. Después del choque la masa m_1 se desvía 30° por debajo de la horizontal y la masa m_2 se desvía 24° por encima de la horizontal. Calcular las velocidades de las esferas después del choque.

R: 5 m/s ; 3,8 m/s

14. Dos esferas de masa $m_1 = 3$ Kg y $m_2 = 2$ Kg se desplazan formando ángulos de 15° y 45° por encima y por debajo de la horizontal respectivamente, con velocidades $V_1 = 5$ m/s; $V_2 = 9$ m/s. Si después del choque la esfera de masa m_2 se desvía 43° por encima de la horizontal, calcular las velocidades de las esferas después del choque.

R: 6 m/s ; 9,6 m/s

15. En la figura 3.93 se muestra un sistema de partículas con los siguientes datos:

$m_1 = 2,5$ Kg
$m_2 = 4$ Kg
$m_3 = 3$ Kg
$m_4 = 5$ Kg
$V_1 = 0,5$ m/s
$V_2 = 2$ m/s
$V_3 = 3$ m/s
$V_4 = 1$ m/s

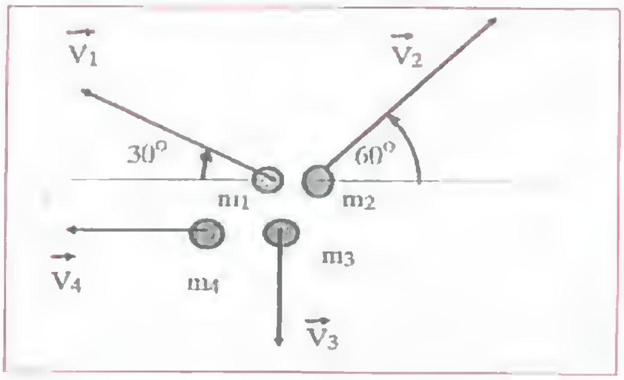


Figura. 3.93

Calcular la magnitud, dirección y sentido de la cantidad de movimiento total del sistema.

R: 3,4 Kg. m/s ; 25° 9'

16. Una roca que está en reposo es dinamitada y se fragmenta en 3 partes. Dos fragmentos de masas 12 Kg y 24 Kg salen disparados con velocidades de 12 m/s y 8 m/s, respectivamente, formando entre sí un ángulo recto, El resto es despedido con una velocidad de 50 m/s. Calcular: a) La cantidad de movimiento del tercer fragmento. b) La masa de dicho fragmento. c) La dirección.

R: a) 240 Kg.m/s b) 4,8 Kg

c) 126° 52'12"

17. Un bote de 2 Kg explota rompiéndose en tres trozos. Dos de ellos tienen una masa de 0,5 Kg cada uno y salen disparados en direcciones perpendiculares con una velocidad de 20 m/s. Calcular: a) La velocidad del tercer fragmento después de la explosión. b) La dirección del vector cantidad de movimiento del tercer fragmento.

R: a) 14,14 m/s b) 135°

18. Una roca se fragmenta en tres partes y dos de los fragmentos salen disparados formando entre sí un ángulo de 50° con velocidades de 20 m/s y 14 m/s. Si sus masas después de la explosión son respectivamente 1,2 Kg y 2,5 Kg, calcular: a) La cantidad de movimiento del tercer fragmento. b) La velocidad del tercer fragmento sabiendo que su masa es de 0,8 Kg.

R: a) 53,53 Kg m/s b) 67,03 m/s

19. Se lanza un cuerpo de masa 1,8 Kg con una velocidad inicial de 30 m/s, formando con la horizontal un ángulo de 38°. Calcular: a) La cantidad de movimiento inicial. b) La cantidad de movimiento cuando haya alcanzado la altura máxima. c) ¿Qué variación se ha producido en la cantidad de movimiento?.

R: a) 54 Kg. m/s b) 42,55 Kg.m/s

c) - 11,45 Kg.m/s

3.13 Centro de masa

Se llama centro de masa de un cuerpo al punto donde debe aplicarse una fuerza no equilibrada para que dicho cuerpo realice un movimiento de traslación sin rotación.

Consideremos un sistema mecánico como el indicado en la figura 3.94, donde un par de partículas de masas m_1 y m_2 están conectadas a través de una barra rígida de masa despreciable (m_1 m_2).

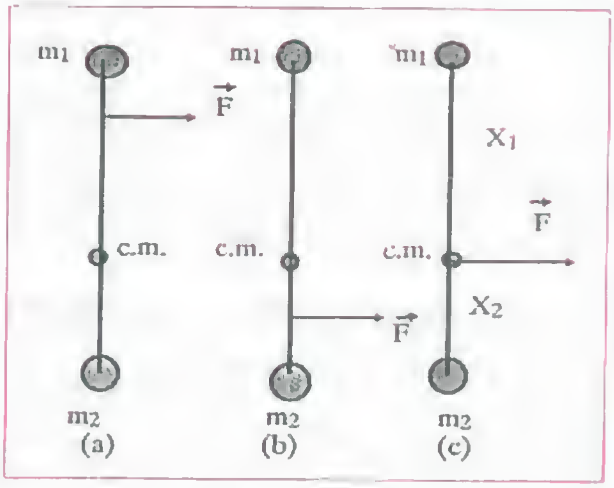


Figura. 3.94

Si se aplica una fuerza F en un punto sobre la barra, más cercano a la masa más pequeña. Figura 3.94(a). el sistema girará en el sentido de las manecillas del reloj.

Si la fuerza en un punto más cercano a la masa más grande, figura 3.94(b), el sistema girará en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Si la fuerza se aplica en el centro de masa, figura 3.94(c), el sistema tendrá sólo traslación.

Esto nos indica que ese punto, que le produce pura traslación, debe estar más cerca de la masa

mayor, es decir, el punto divide la longitud de la varilla en proporción inversa a sus masas.

Si llamamos X_1 la longitud desde el centro de masa hasta la menos masa y X_2 la longitud desde el centro de masa hasta la masa mayor, podemos escribir que:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

En cualquier sistema, el centro de masa de dos masas se encuentra en la recta que las une, en forma tal que divide dicha recta en segmentos inversamente proporcionales a dichas masas.

Expresión matemática del centro de masa de un sistema en relación a un punto de origen.

Consideremos dos partículas (figura. 3.95) de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades V_1 y V_2 sobre el eje horizontal. La cantidad de movimiento total es:

$$P = m_1V_1 + m_2V_2$$

Imaginemos un punto entre las partículas que llamaremos centro de masa (C.M.), de tal manera que su masa $M = m_1 + m_2$, y que se mueva con una velocidad V, su cantidad de movimiento es

$$P = M\,V.$$

Por el principio de conservación de la cantidad de movimiento se tendrá que:

$$MV = m_1V_1 + m_2V_2, \qquad \text{de donde:}$$

$$V = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{M}$$

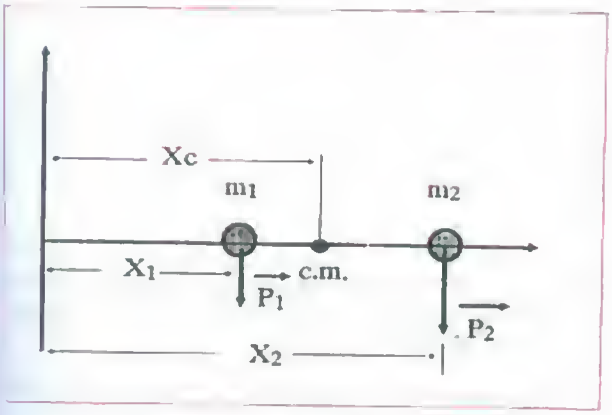


Figura 3.95

Sean:

X_c : La abscisa del centro de masa

X_1 : La abscisa de la partícula de masa m_1

X_2 : La abscisa de la partícula de masa m_2

La componente de la velocidad de cada una sobre el eje x si Δt tiende a cero es:

$$V = \frac{\Delta X_c}{\Delta t}$$

$$V_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$$

$$V_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t}$$

puede sustituirse en la ecuación anterior, quedándonos que:

$$\frac{\Delta x_c}{\Delta t} = \frac{m_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t}}{M}$$

Esta expresión puede escribirse así:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \cdot x_c = \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} \right)$$

Igualdad que se satisface para:

$$\boxed{x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M}}$$

Esta expresión puede generalizarse para Y_c y Z_c, así:

$$Y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{M}$$

$$Z_c = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{M}$$

Velocidad del centro de masas

Consideremos una interacción en la cual los cuerpos después del choque permanezcan unidos.

Sean m_1 y m_2 las masas de dos cuerpos que después del choque permanecen unidos, teniendo

en ese momento la misma velocidad V que es la velocidad del centro de masas V_c, evidentemente será la velocidad de ambos cuerpos.

Según la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, la suma de las cantidades de movimiento después del choque y se tendrá que:

$$m_1.V_1 + m_2.V_2 = (m_1 + m_2)V$$

Como m_2 está inicialmente en reposo, se tiene que $V_2 = 0$.

Luego,

$$m_1.V_1 = (m_1 + m_2)V.$$

Conclusión

"En un sistema aislado, la masa del sistema multiplicado por la velocidad del centro de masas es igual a la cantidad de movimiento total del sistema".

Problemas resueltos

Problema 1

Se tiene una lámina como la mostrada en la figura 3.96(a). Hallar la posición del centro de masas.

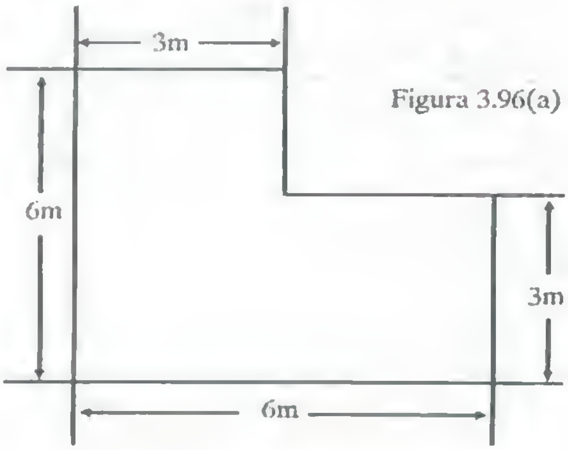


Figura 3.96(a)

Solución

Consideremos la lámina constituida por tres cuadrados iguales, tal como lo muestra la figura 3.96(b) donde se ubican las masas iguales.

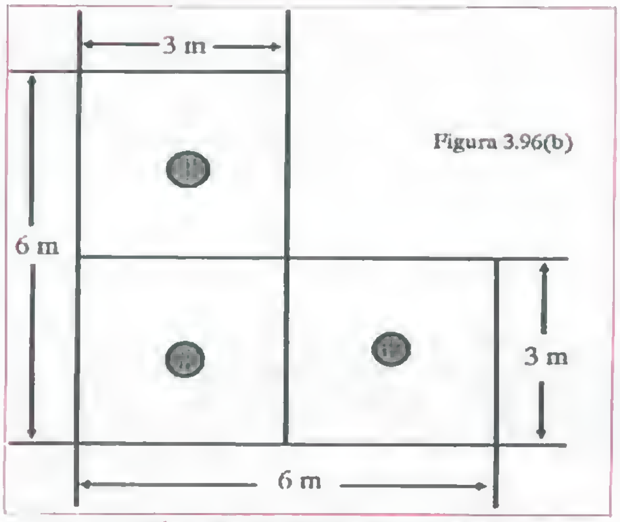


Figura 3.96(b)

Las coordenadas del centro de masa es:

$$X_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$X_{CM} = \frac{m.1,5 + m.1,5 + m.4,5}{m + m + m}$$

$$X_{CM} = \frac{7,5\ m}{3\ m}$$

$$X_{CM} = 2,5\ m$$

$$Y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Y_{CM} = \frac{m.4,5 + m.1,5 + m.1,5}{m + m + m}$$

$$Y_{CM} = \frac{7,5\ m}{3\ m}$$

$$Y_{CM} = 2,5 \text{ metros}$$

Luego el centro de masas del sistema se encuentra en el punto $X_{MC} = (2,5; 2,5)$.

Problema 2

Tres partículas de igual masa están ubicadas como lo indica la figura 3.97 donde $V_1 = 10$ m/s; $V_2 = 30$ m/s y $V_3 = 20$ m/s.

Calcular: a) La posición del centro de masas. b) La velocidad del centro de masas.

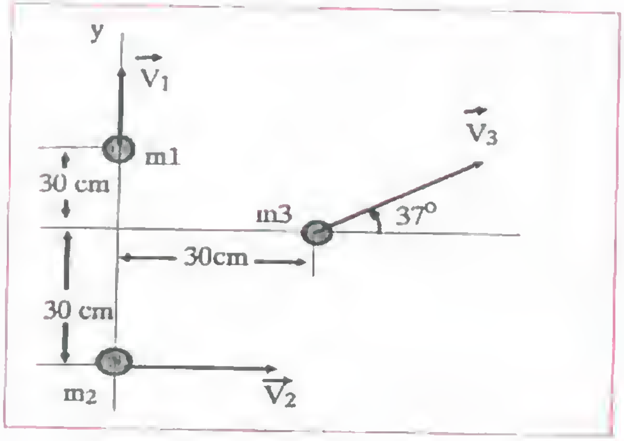


Figura. 3.97

Solución.

a) La posición del centro de masas viene dada por:

$$X_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m + m + m}$$

$$X_c = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m}$$

$$X_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$x_c = \frac{0 + 0 + 30\ cm}{3}$$

$$x_c = 10\ cm$$

$$Y_c = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{m + m + m}$$

$$Y_c = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3\ m}$$

$$Y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$Y_c = \frac{30 - 30 + 0\ cm}{3}$$

$$Y_c = \frac{0}{3}\ cm = 0$$

Las coordenadas del centro de masas son:

$(x_c, y_c) = (10\ cm, o)$

b) Determinemos la velocidad del centro de masas en caja eje:

$$V_x = \frac{m(V_{3x} + V_{2x})}{3\ m}$$

$$V_x = \frac{V_3 \cos 37^o + V_2 \cos 0^o}{3}$$

$$V_x = \frac{20m/s.\cos37^o + 30m/s}{3}$$

$$V_x = \frac{20m/s.\cos37^o + 30m/s}{3}$$

$$\boxed{V_x = 15{,}32\ m/s}$$

$$V_y = \frac{m(V_{1y} + V_{3y})}{3\ m}$$

$$V_y = \frac{V_1\, sen90^o + V_3\, sen37^o}{3}$$

$$V_y = \frac{10m/s + 20m/s.sen\ 37^o}{3}$$

$$\boxed{V_y = 7{,}35\ m/s}$$

La magnitud de la velocidad del centro de masas Viene dada por

$$V = \sqrt{(15{,}32m/s)^2 + (7{,}35m/s)^2}$$

$$\boxed{V = 16{,}99\ m/s}$$

Problemas propuestos

1. Calcular las coordenadas del centro de masas de un sistema de tres partículas de masas $m_1 = 1$ Kg; $m_2 = 2$ Kg; $m_3 = 3$ Kg, si las coordenadas respectivas son en un sistema de coordenadas m_1: (0,0); m_2: (2,0) y m_3 (1,2).

R: 7/6 y 1

2. Se tiene un cuadrado de 2 m de lado y en los vértices superior izquierdo, superior derecho, inferior izquierdo e inferior derecho se colocan

masas de 1 Kg, 2 Kg, 4 Kg y 3 Kg, respectivamente. Hallar las coordenadas del centro de masas. Elige un sistema de coordenadas cuyo origen esté en la masa de 4 Kg.

R: (1,3/2)

3. Un sistema está formado por dos partículas de masas $m_1 = 2$ Kg y $m_2 = 8$ Kg, localizadas en los puntos (-2,2) y (2,1) respectivamente. La primera se mueve con una velocidad de 6 m/s, formando un ángulo de 30^o con el semieje positivo de las "x" y la segunda con una velocidad de 4 m/s y paralela al eje de las "x". calcular: a) La posición inicial del centro de masas. b) La velocidad del centro de masas.

R: a) 6/5 , 6/5 b) 1,93 m/s , 17° 16'10"

4. En la figura 3.98 se muestran varias masas con sus respectivas coordenadas y velocidades:

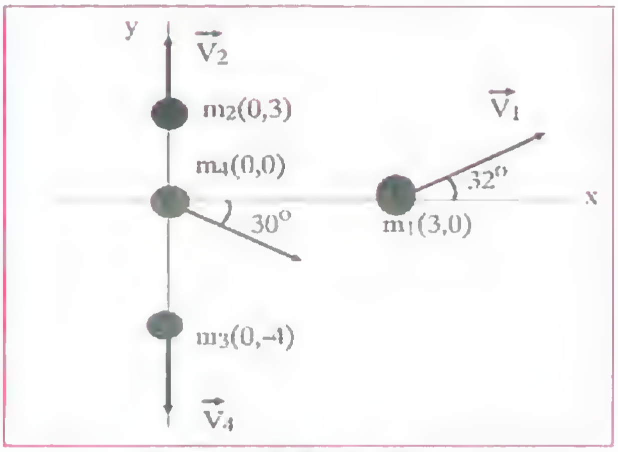


Figura 3.98

$m_1 = 2$ Kg m_1: (3,0)cm $V_1 = 3$ m/s

$m_2 = 1$ Kg m_2: (0,3)cm $V_2 = 1$ m/s

$m_3 = 3$ Kg m_3: (0,-4)cm $V_3 = 2$ m/s

$m_4 = 1$ Kg m_4: (0,0)cm $V_4 = 4$ m/s

Calcular: a) Las coordenadas del centro de masas. b) La velocidad del centro de masas.

R: a) (6/7, -9/7)cm

b) $V_x = 1{,}22$ m/s y $V_y = -0{,}026$ m/s

5. Cuatro partículas están dadas por sus masas y sus respectivas coordenadas de la siguiente forma:

$m_1 = 5$Kg m_1: (0,0)cm

$m_2 = 3$Kg m_2: (6,6)cm

$m_3 = 2$Kg m_3: (3,0)cm

$m_4 = 4$Kg m_4: (-2,-6)cm

¿Cuáles son las coordenadas del centro de masas?.

R: (16/14, -6/14)cm

6. Observa la figura 3.99. ¿Cuál es la posición del centro de masas?

R: (b + 9/3, -9/2)

7. Tres masas de 80 gr cada una están ubicadas en los tres vértices de un triángulo equilátero de 20 cm de lado. Calcular las coordenadas del centro de masas. Elige un sistema de coordenadas cuyo origen esté en cualquiera de los vértices.

R: X_c = 0 cm; Y_c = 5,77 cm

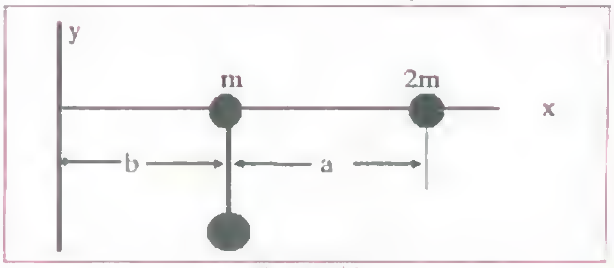


Figura 3.99

8. Tres masas iguales se encuentran ubicadas en un eje de coordenadas de la siguiente manera: una en el origen, otra 0 sobre el eje x situada a L metros del origen y la tercera en el punto (L/2,h). Hallar el centro de masas del sistema.

R: (L/2 ; 0,28L)

9. Un sistema de partículas consta de tres masas puntuales cuyos valores son: m = 1 Kg, $m_2 = 2$ Kg y $m_3 = 3$ Kg, ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado. Determinar las coordenadas del centro de masas del sistema.

R: (0,17 m ; 0,29 m)

10. Un sistema está constituido por dos partículas de masa $m_1 = 8$Kg y $m_2 = 12$ Kg localizadas en los puntos $P_1(2,-3)$ y $P_2(4,1)$ respectivamente. La primera se mueve con una velocidad de 5 m/s formando un ángulo de 30^o con la dirección horizontal y la segunda se mueve con una

velocidad de 2 m/s sobre el eje y en sentido negativo. Calcular: a) La posición inicial del centro de masas. b) La velocidad del centro de masas. c) La cantidad de movimiento total del centro de masas.

R: a) 3,2 y -0,6 b) 23,06 m/s c) 461,2 m/s

Autoevaluación

A. Selecciona la alternativa correcta y escríbela en tu cuaderno

1. El valor de la constante G de la gravitación universal fue encontrado por:
a) Newton;
b) Cavendish;
c) Kepler;
d) Ticho Brahe.

2. El centro de masa de dos cuerpos es un punto ubicado:
a) En el punto medio de la distancia que separa los cuerpos.
b) Más cerca de la partícula de mayor masa.
c) Más cerca de la partícula de menor masa.
d) Ninguna de las anteriores.

3. Si dos cuerpos A y B son tales que la masa de A es mayor que la masa de B y ambos están inicialmente en reposo, entonces, si ambos reciben el mismo impulso puede ocurrir que:
a) La cantidad de movimiento de A es mayor que la cantidad de movimiento de B.
b) La cantidad de movimiento de A es igual a la cantidad de movimiento de B.
c) La cantidad de movimiento de A es menor que la cantidad de movimiento de B.
d) La velocidad adquirida por A es mayor que la velocidad adquirida por B.

4.Si un cuerpo viaja con velocidad constante, entonces:
a) Sobre él no actúa ninguna fuerza.
b) Actúa una fuerza constante sobre él.
c) La fuerza resultante que actúa es nula.
d) Existe una fuerza variable que produce el movimiento.

5. Si la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo se incrementa en un 50%, la aceleración del cuerpo:
a) Se incrementa en un 50%.
b) Se incrementa en un 100%.
c) Se reduce en un 50%.
d) Se reduce en un 100%.

6. Si un cuerpo se desliza sobre un plano inclinado 30° sin rozamiento, la aceleración del cuerpo es ($g = 9{,}8\ m/s^2$):

a) $9{,}8\ m/s^2$.
b) $4{,}9\ m/s^2$.
c) $13{,}2\ m/s^2$.
d) $8{,}6\ m/s^2$.

7. Sobre un cuerpo de masa m, actúa una fuerza de 4 N, produciéndose en él una aceleracion de 2 m/s^2. La fuerza que se debe ejercer sobre el mismo cuerpo para producir una aceleración de 6 m/s^2 es:
a) 2 N
b) 4 N
c) 6 N
d) 12 N.

8. Si una fuerza F, al actuar sobre un cuerpo de masa m, produce una aceleración a, la misma fuerza al actuar sobre un cuerpo de masa 2 m, produce una aceleración
a) a.
b) 2a.
c) 4a.
d) a/2.

9. La aceleración de gravedad de la luna es:
a) igual a la de la tierra.
b) No existe gravedad.
c) La mitad de la gravedad terrestre.
d) La sexta parte de la gravedad terrestre.

10. La cantidad $6{,}67.10^{-11}\ N.m^2/Kg^2$ corresponde a:
a) La distancia de la tierra a la luna.
b) La constante de la gravitación universal.
c) El período de la luna.
d) La masa de la tierra.

B. Verdadero y falso

Se dan varias alternativas falsas y verdaderas. Di cuáles son falsas y cuáles verdaderas. Redacta adecuadamente en tu cuaderno la afirmación falsa para que se convierta en verdadera.

11. La cantidad de movimiento es una magnitud escalar.

12. El impulso ejercido sobre una partícula durante cierto intervalo de tiempo es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula.

13. Sólo las fuerzas de intervalos de tiempo muy largos producen impulsos.

14. El centro de masas de dos cuerpos es un punto situado en el punto medio de la distancia de la distancia que separa los dos cuerpos.

15. Las constantes, G de la gravitación universal, y g de la gravedad, tienen el mismo significado y pueden usarse indistintamente.

16. La masa total de un sistema, multiplicada por la velocidad del centro de masas, es igual a la cantidad de movimiento del sistema.

17. En el sistema de referencia del centro de masas la cantidad de movimiento total es cero.

18. La fuerza de roce puede actuar sobre un cuerpo en reposo.

19. Cuando un cuerpo no posee aceleración puede decirse que no actúan fuerzas sobre él.

20. El kilopondio equivale a 980.000 dinas.

C. Resuelve los siguientes problemas.

21. Una masa de 10 Kg que se desplaza a 20 m/s hacia la derecha interacciona con otra masa que se desplazaba inicialmente hacia la izquierda a 20 m/s. Después de la interacción, las dos masas se mueven hacia la derecha a 5 m/s. ¿Cuál es el valor de la segunda masa? **R: $m_2 = 6$ Kg.**

22. Un proyectil de masa 1,8 Kg se lanza con una velocidad inicial de 50 m/s, formando con la horizontal un ángulo de 42°. Calcular la cantidad de movimiento a los 3 s del lanzamiento. ¿Cuál es la dirección del vector cantidad de movimiento?.

R: 67,284 Kg.m/s – 6° 55' 7''

23. Tres masas puntuales están situadas en el plano X,Y del modo siguiente. m_1 = 1 Kg y ubicada en el origen; m_2 = 1Kg ubicada en x = 4 m sobre el eje X; y m_3 = 2 Kg ubicada en x = 2m, y = 2m. Hallar las coordenadas del centro de masas.

R: (2, 1).

24. Sobre un plano inclinado 30° se coloca un cuerpo de mas m_1 = 5 Kg el cual está unido por medio de una cuerda ligera que pasa por una polea a otro cuerpo de masa m_2 = 8 Kg, tal como lo muestra la figura 3.99. Calcular: a) la aceleración del sistema, b) la tensión de la cuerda, c) la longitud del plano inclinado, si el bloque de masa m_1 lo recorre en 3 s, d) la fuerza que el plano ejerce sobre el bloque. $\mu_k = 0,2$ y $g = 9,8\ m/s^2$

R: a) 3,49 m/s² b) 50,48 N c) 15,7 m d) 42,44 N

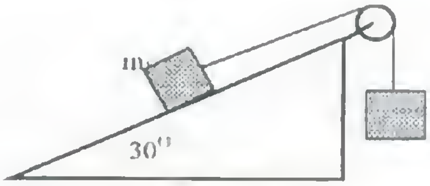


Figura 3.99

25. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la gravedad a una altura de 600 Km? Si la masa de una persona es 78 Kg, ¿en qué porcentaje se reduce su peso a esa altura?.

R: 8,19 m/s² – 16,4%

26. Se tiene un cuadrado de 20 cm de lado, donde en cada vértice están ubicadas cargas positivas de 8 μC. Calcular la fuerza que actúa sobre la carga ubicada en el vértice inferior izquierdo. ¿Cual es su dirección?

R: 27,56 N-225°

27. Se tiene un triángulo equilátero de 25 cm de lado. Si en cada uno de sus vértices se colocan masas de 5 Kg, determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante de dos de las masas sobre la otra.

R: $4,62.10^{-8}$ N. Se dirige hacia el centro del triángulo.

28.

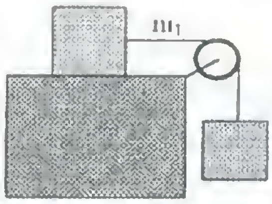


Figura 3.40

En la figura 3.40 se muestran dos bloques de masas m_1 y m_2. Si m_2 arrastra a m_1, demuestra, sin considerar el roce que la expresión para la tensión de la cuerda es $T = \dfrac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}.g$

29. Usando el problema anterior y siendo el coeficiente de roce μ, encontrar una expresión para la aceleración del sistema.

R: $a = \dfrac{g(m_2 - \mu\, m_2)}{m_1 + m_2}$

UNIDAD IV

LA ENERGÍA, SUS FORMAS Y TRANSFERENCIA

- Energía.
- Energía. Sociedad.
- Trabajo. Trabajo de una fuerza. Unidades.
- Potencia. Unidades.
- Energía cinética.
- Energía potencial.
- Choques elásticos e inelásticos.
- Energía potencial gravitatoria.
- Principio de conservación de la energía mecánica.
- Principio de conservación de la energía.
- Problemas propuestos.
- Autoevaluación.

UNIDAD 4

LA ENERGIA Y SUS FORMAS DE TRANSFERENCIA

4.1 Energía

Introducción

El término energía es pronunciado diariamente por políticos, economistas, físicos, químicos, biólogos, educadores y toda persona que de una u otra forma se ha planteado como tarea el enfrentar la crisis energética y luchar por la conservación de los recursos no renovables.

En el transcurso de los siglos, casi toda la energía utilizada por la humanidad se ha originado a partir de la radiación solar llegada a nuestro planeta. Un 96% de las necesidades energéticas del hombre han quedado satisfechas por la combustión de carburantes fósiles (carbón, petróleo y gas natural) que representan la energía química almacenada biológicamente durante la larga vida de la tierra. Cuando éstas fuentes se hayan agotado se deberá buscar la solución para un futuro próximo.

La investigación en los distintos recursos energéticos apunta, junto a las energías convencionales como el carbón o el petróleo, hacia dos nuevas fuentes fundamentales: **la energía nuclear** y **la energía solar**.

La primera atiende ya una significativa parte de la demanda energética, mientras que la solar está iniciando sus aplicaciones en ciertos campos, como la calefacción, donde su utilización presenta menos dificultades y limitaciones tecnológicas.

Técnicamente la energía nuclear se encuentra hoy en un estado de desarrollo superior al de la energía solar, tomando en consideración que la energía nuclear no se encuentra en fase experimental, sino en un proceso de explotación por más de veinticinco años.

Fuentes de energía

Entre las principales fuentes de energía en la naturaleza podemos encontrar las siguientes:

La energía eólica está referida a la que proporciona el viento, la cual es usada para hacer girar molinos especiales acoplados a un generador que produce energía eléctrica y sirve para el bombeo hidráulico en los campos.

La energía solar proveniente del sol hace posible el crecimiento de las plantas, las cuales pueden realizar el proceso de la fotosíntesis. Los arboles al crecer suministran madera, cuya energía es aprovechada como fuente de calor.

Las celdas solares son dispositivos capaces de transformar la energía solar en energía eléctrica. Ellas tiene gran uso en los satélites artificiales con el objetivo de cargar las baterias químicas, con las cuales se satisfacen las necesidades de electricidad.

La energía atómica es la energía proveniente de los núcleos de los átomos, energía que es liberada cuando se bombardea un átomo de uranio con neutrones. Esto trae como consecuencia que los átomos se desintegren, liberando una cantidad enorme de energía.

La energía química es la energía proveniente de las reacciones químicas que se llevan a cabo en el carbón, la gasolina y las pilas, convirtiéndose en otras formas de energía. Así, el carbón al quemarse produce energía térmica. La gasolina produce energía de movimiento y en las pilas se producen reacciones químicas internas para producir energía eléctrica.

La energía de la biomasa, la cual es la energía liberada como el proceso de descomposición de los desechos orgánicos, los cuales liberan energía en forma de gases. Esta energía es también llamada fotosintética, ya que la luz origina en las plantas reacciones bioquímicas capaces de transformar el agua y el gas carbónico contenido en el aire, en moléculas orgánicas complejas (almidón, azúcar, proteínas etc) que componen la masa vegetal o biomasa.

La energía térmica es la energía originada por el movimiento molecular de un cuerpo.

La energía radiante es la energía de las ondas electromagnéticas, tales como las ultravioletas, luminosas, infrarrojas, de radio, micro-ondas etc. La casi totalidad de la energía que recibimos del sol es una forma de energía radiante.

La energía hidroeléctrica, la cual consiste en dejar caer desde una gran altura una cantidad de agua sobre una turbina, haciendo que éstas giren. Estas turbinas a su vez ponen en movimiento un generador capaz de producir electricidad. Aquí está inmersa la **energía potencial** de la represa de agua, la cual se transforma en **energía cinética** al ponerse en movimiento para girar las turbinas, quienes a su vez originan **energía eléctrica**.

4.2 Transferencia de energía

Al calentar un cuerpo, evidentemente se está gastando energía. Las partículas que constituyen el cuerpo incrementan su actividad aumentando su movimiento, con lo cual aumenta la energía de cada una de ellas y, por tanto, la energía interna del cuerpo.

Se sabe, que al poner en contacto dos cuerpos, uno caliente y otro frío, el primero se enfría y el segundo se calienta. Esta transferencia de energía desde el primer cuerpo hasta el segundo se lleva a cabo de la manera siguiente: las partículas del cuerpo más caliente, que se mueven más rápidamente por tener más energía, chocan con las partículas del segundo que se encuentran en la zona de contacto, aumentando su movimiento y, por tanto su energía. El movimiento de éstas partículas se transmite rápidamente a las restantes del cuerpo, aumentando la energía contenida en él a costa de la energía que pierde en los choques las partículas del primer cuerpo.

La energía que se transfiere de un cuerpo a otro se denomina **calor**. No es correcto afirmar que el calor se encuentra almacenado en los cuerpos, lo que está almacenado en ellos es la energía, es decir, calor es la energía que se transfiere de un cuerpo a otro o de un sistema a otro.

Los cambios en el proceso de transferencia de energía se llevan a cabo en una dirección, desde el que suministra dicha energía hasta el que la recibe. Veamos dos ejemplos:

- El crecimiento de las plantas constituye un **cambio** gracias a la transferencia de energía emitida por el sol y donde el **receptor** son las plantas.

_ Cuando un automóvil se pone en movimiento ocurre un **cambio** gracias a la transferencia de energía desde el combustible (emisor) hacia el automóvil el cual es el **receptor**.

Manifestaciones de la energía

La energía, en su proceso de transformación y transferencia, va manifestándose de una forma a otra, originando así lo que hoy en día constituye nuestro desarrollo científico y tecnológico, comprendiéndose que ella desempeña un papel primordial en la vida del hombre.

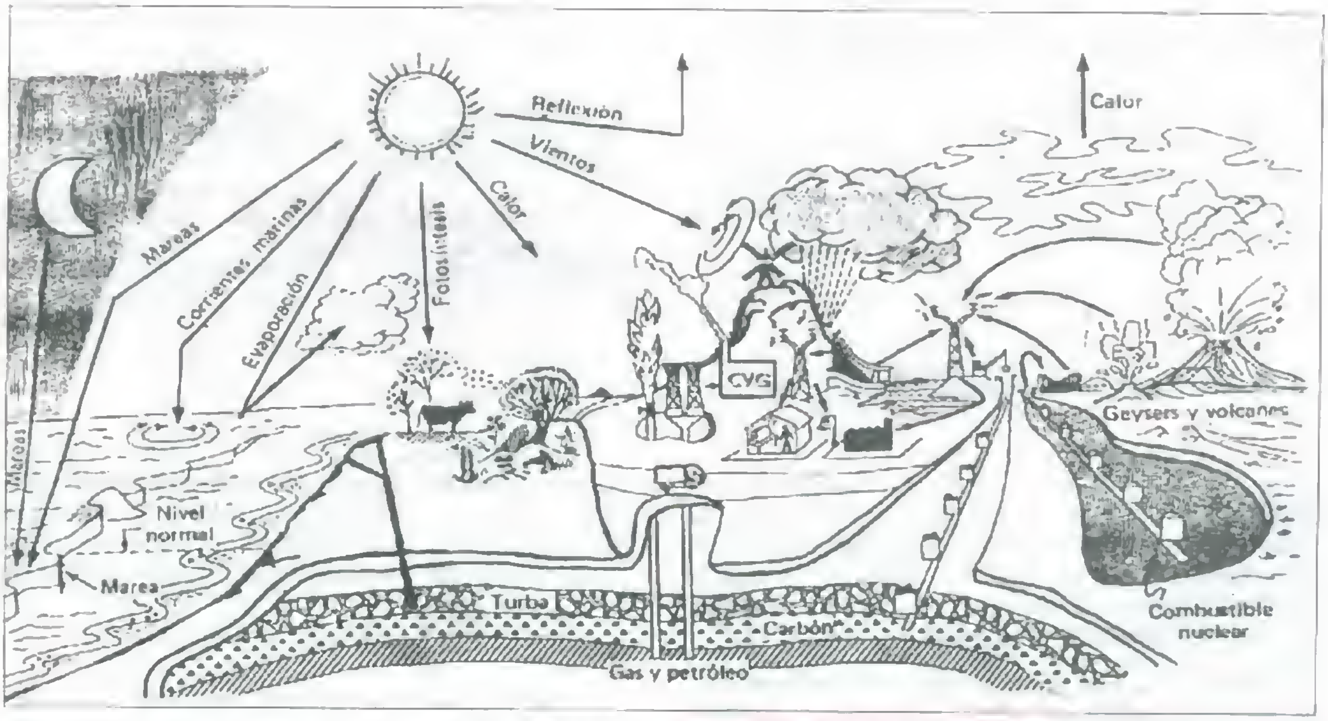
Cuando encendemos la hornilla de la cocina de gas y ponemos a calentar agua en un recipiente de metal, se lleva a cabo el siguiente proceso: el combustible, que en éste caso es el gas, al quemarse libera la **energía interna** que poseía y la transforma en **energía calórica** que es absorbida por el recipiente y éste por el proceso de conducción la transmite al agua que hierve para luego convertirse en vapor. Ese calor obtenido por el agua no es más que la energía de las moléculas contenidas en ella.

Se ha dicho y se dirá siempre que **el sol es la principal fuente de energía en la tierra**, tanto es así, que sin él sería casi imposible la subsistencia en nuestro planeta.

Las reacciones nucleares originadas en el interior del sol, debido a las grandes temperaturas, dan como resultado una liberación de energía que llega hasta la tierra en forma de radiación electromagnética. Esto trae como consecuencia el calentamiento del agua contenida en los ríos, lagos y mares, la que a su vez se evapora condensándose en la nubes. Estas a su vez se desplazan en diferentes direcciones por efecto de los vientos, precipitándose luego en forma de lluvia. Las precipitaciones se encargan de alimentar los ríos quienes a su vez fluyen hacia los mares y océanos, cumpliéndose así el ciclo constante del agua, gracias a la energía solar.

El agua proveniente de las montañas es almacenada en represas en forma de **energía potencial**. Al abrir las compuertas, el agua se pone en movimiento, se dice que ha adquirido **energía cinética**. Esta energía de movimiento hace rotar una turbinas, que a su vez son capaces de generar **energía eléctrica** que posteriormente será transferida a las ciudades y viviendas. En éstas últimas, la energía eléctrica es usada para obtener, **energía luminosa** en los fluorescentes y bombillos, **energía mecánica** al encender la licuadora o la lavadora, **energía térmica** al encender una plancha o la hornilla de una cocina eléctrica.

Por otro lado, también las plantas son capaces de realizar sus funciones a través de la **energía radiante** proveniente del sol, radiación que es absorbida a través de las hojas de las plantas verdes para realizar el proceso de la fotosíntesis. Al



alimentarnos de plantas, utilizamos la energía química extraída de esos alimentos para múltiples propósitos: transmisión de impulsos nerviosos, crecer, realizar trabajos musculares etc.

La otra forma de energía acumulada en las plantas data de millones de años atrás, cuando una parte de organismos biológicos se fueron enterrando, originándose en ellos una serie de transformaciones hasta convertirse en combustibles fósiles (carbón, petróleo) que hoy en día constituyen fuentes energéticas importantes y de los cuales dependemos en gran parte. Estas fuentes de energía han ido agotándose y de continuar así ya no tendremos recursos energéticos. Es ésta la razón por la cual debemos ir buscando fuentes alternas y una de ellas la constituye el sol.

Concepto de energía

Una de las nociones fundamentales de la física está representado en el concepto de la energía, pues, los físicos no saben muy bien lo que es la energía en cuanto al conocimiento de su constitución; no conocen su auténtica naturaleza.

Para ver qué es la energía la trataremos de vincular con los procesos de transformación o cambio y su conservación en términos de cantidad, pudiendo decirse que:

La energía es una propiedad o atributo de los cuerpos o sistemas materiales en virtud de la cual éstos son capaces de transformarse, modificando su condición o estado, así como actuar sobre otros, originando en ellos procesos de transformación.

4.3 Energía y sociedad

El término energía es, probablemente, uno de los vocablos propios de la física que más es nombrado.

La crisis de la energía, el aprovechamiento de la energía y las energías alternativas son expresiones semejantes que están de moda en la actualidad. Su razón es, porque una sociedad industrial moderna es una complicada máquina capaz de degradar energía de alta calidad hasta verla convertida en calor residual.

El consumo de energía ha ido creciendo desde las épocas antiguas hasta nuestros días a un ritmo acelerado. Esta es la razón, por la cual existe una gran preocupación entre economistas, políticos y ecologistas.

Las actuales fuentes de energía en el mundo (carbón, petróleo, gas natural y uranio) están siendo reemplazadas por otras fuentes alternativas, ya

que ellas están causando serios problemas al medio ambiente, además de que algún día se agotarán.

Nuestro planeta está dotado de un privilegio como es la energía gratuita proveniente del sol, la cual es esencial para todos los seres vivos. Esta es la razón por la cual debemos transformarla y aprovecharla de una manera racional.

4.4 Trabajo. Trabajo de una fuerza. Unidades

El trabajo como una medida de la energía transferida

Como es conocido por todos, la energía no la podemos tocar, ver o contar. Sin embargo, si podemos ver sus manifestaciones en el proceso de transformación de una forma a otra. Para evaluar y medir esa transferencia de energía se introduce el concepto de **trabajo mecánico.**

Para que un carrito, que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal sin roce adquiera energía de movimiento, es necesario darle un impulso o halarlo con una cuerda.

Supongamos que el carrito mostrado en la figura 4.2(a) es halado por medio de una cuerda que se mantiene horizontal, es decir, paralela a la dirección en la cual el carrito se mueve.

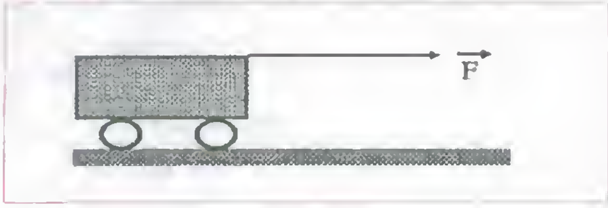


Figura 4.2(a)

La persona que lo pone en movimiento ha gastado energía muscular, la cual ha sido transferida al carrito, manifestándose como energía de movimiento. Aquí se puede decir en forma cualitativa: **el trabajo es la forma de medir la cantidad de energía transferida.**

El concepto científico de trabajo es mucho más preciso e implica la presencia de tres factores:

a) Una fuerza aplicada.

b) La fuerza debe actuar a lo largo de cierta distancia.

c) La fuerza debe tener una componente a lo largo del desplazamiento.

Dadas estas tres condiciones y llamando F la fuerza aplicada y x el desplazamiento podemos definir formalmente:

El trabajo realizado por una fuerza constante es la magnitud medida por el producto escalar de la fuerza aplicada y el desplazamiento que ha experimentado el punto de aplicación de esa fuerza.

Matemáticamente podemos escribir:

$$W = F.x$$

Por definición de producto escalar sabemos que el producto escalar de dos vectores es una magnitud escalar igual al producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que ellos forman, pudiéndose escribir la expresión anterior así:

$$W = F.x.\cos\alpha$$

Nótese que en la figura 4.2(b) la fuerza F tiene dos componentes:

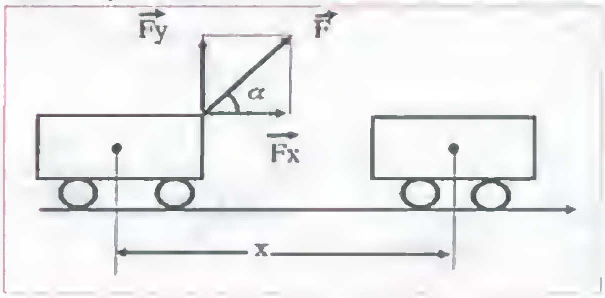


Figura 4.2(b)

F_x: componente de F en la dirección de x

F_y: componente de F en la dirección del eje y.

Análisis de la fórmula de trabajo

La ecuación del trabajo mecánico viene dada por

$$W = F.x.\cos\alpha$$

La función matemática coseno varía entre 1 y -1 cuando la variación del ángulo es entre 0° y 180° y tiene el valor cero (0) cuando el ángulo es de 90°.

En base a este aspecto estudiemos los siguientes casos:

Caso 1.

Cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento.

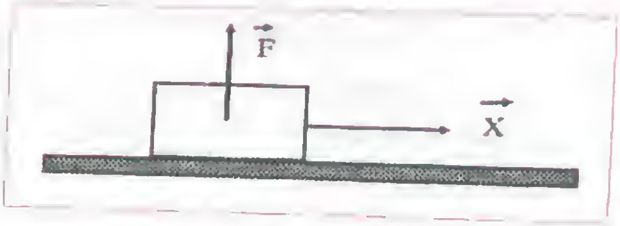


Figura 4.3(a)

Observemos la figura 4.3(a)

Si aplicamos la ecuación de trabajo y hacemos

$\alpha = 90^{\circ}$ se tendrá que:

$W = F.x.\cos 90^{\circ}$

$W = F.x.\alpha \ (\cos 90^{\circ} = 0)$

$W = 0$

Podemos concluir que:

Cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento el trabajo realizado es nulo.

Caso 2.

Cuando la fuerza aplicada tiene la misma dirección del desplazamiento

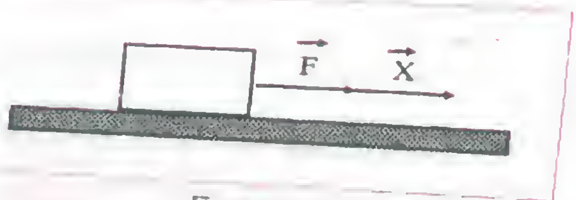


Figura 4.3(b)

Observemos la figura 4.3(b)

Al aplicar la ecuación del trabajo y haciendo $\alpha = 0^{\circ}$ se tendrá que:

$W = F.x.\cos 0^{\circ}$

$W = F.x. 1 \ (\cos 0^{\circ} = 1)$

$W = F.x$

Podemos concluir que:

Cuando la fuerza aplicada tiene la misma dirección del desplazamiento el trabajo realizado es máximo

Caso 3.

Cuando el ángulo está comprendido entre 0° y 90°.

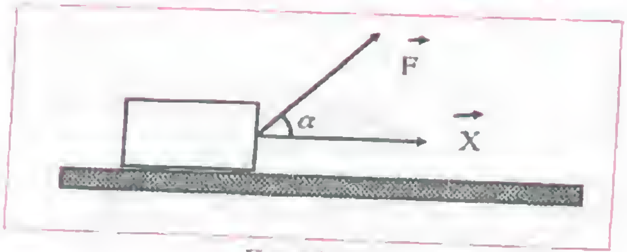


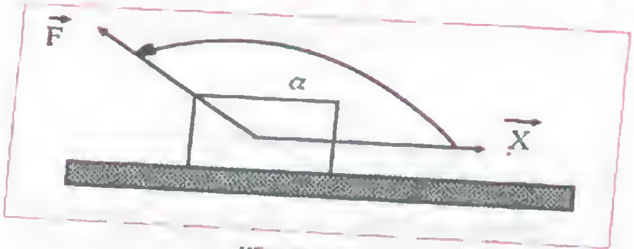
Figura 4.3(c)

Observemos la figura 4.3(c)

En este caso el cos α es positivo y como consecuencia el trabajo será positivo. Esto indica que la fuerza F aplicada tiene una componente en la misma dirección y sentido del desplazamiento.

Caso 4.

Cuando el ángulo está comprendido entre 90° y 180°



Ffigura 4.3(d)

Observemos la figura 4.3(d)

En este caso el cos α es negativo y como consecuencia el trabajo será negativo. Esto significa que la fuerza F aplicada tiene una componente en la misma dirección del desplazamiento pero en sentido opuesto.

Consecuencias

Del análisis que hemos hecho podemos escribir las siguientes conclusiones:

1. El trabajo es una magnitud escálar positiva, negativa o nula.
2. Si la fuerza es nula no realiza trabajo.

3. Si no hay desplazamiento tampoco se desarrolla trabajo.

4. Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, dicha fuerza no realiza trabajo.

Unidades de trabajo mecánico

Dimensionalmente, un trabajo es el producto de una fuerza por una longitud. De esta forma su unidad se define como el trabajo que realiza la unidad de fuerza al desplazar su punto de aplicación una unidad de longitud en la misma dirección de la fuerza.

En la ecuación de trabajo el coseno de α no tiene dimensiones por lo que las unidades dependerán únicamente del producto F.x

* **Unidad c.g.s**

W = F.x = dina.cm = **ergio**

* **Unidad M.K.S**

W = F.x = Newton.m = **Joule**

* **Sistema Técnico**

W = F.x = Kp.m = **Kilopondímetro**

Cada una de las unidades de trabajo las podemos definir así:

Un ergio es el trabajo realizado por la fuerza de una dina cuando el cuerpo al cual está aplicada se desplaza un centímetro en su misma dirección y sentido.

Un Joule es el trabajo realizado por la fuerza de un Newton cuando el cuerpo al cual está aplicado se desplaza un metro en su misma dirección y sentido.

Un Kilopondímetro o kilográmetro es el trabajo realizado por la fuerza de un Kilopondio cuando el cuerpo al cual está aplicada se desplaza un metro en su misma dirección y sentido.

Equivalencia entre unidades de trabajo mecánico.

Entre Joules y ergios

Partimos de un Joule el cual descomponemos así:

1 Joule = 1 Newton.1m

$= 10^5$ dinas.10^2 cm

$= 10^7$ ergios

1 Joule = 10^7 ergios

Entre Kgm y Joules

1 Kgm = 1 Kp.1 m

= 9,8 Newton.1 m

= 9,8 Newton.m

1 Kgm = 9,8 Joules.

A continuación se presenta un resumen de equivalencias para efectuar las transformaciones de una manera más sencilla. Ver la figura 4.4.

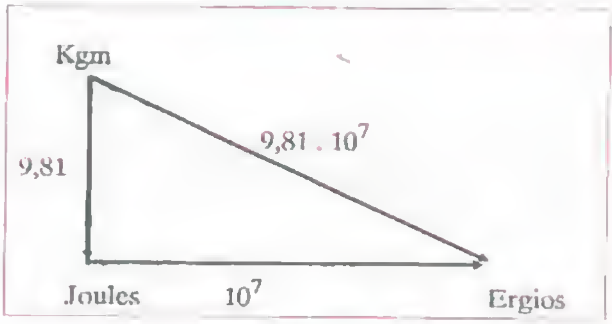


Figura 4.4

* Si sigues el mismo sentido de la flecha **multiplicas**

* Si sigues el sentido opuesto a la flecha **divides**

Ejercicios resueltos

1. Transformar $2{,}5.10^{-3}$ Joules a ergios.

Observando la figura 4.4 notamos que debe multiplicarse por 10^7, por que se sigue el mismo sentido de la flecha.

$2{,}5.10^{-3}.10^7$ ergios

$2{,}5.10^4$ ergios.

2. Transformar 15991.10^5 ergios a Kgm

Observando la figura 4.4 notamos que se debe dividir entre $9,81.10^7$.

$$\frac{15991.10^5}{9,81.10^7}\ \text{Kgm} = 16,3\ \text{Kgm}$$

Ejercicios propuestos

Efectuar las transformaciones siguientes:

1. 2 Kgm a ergios
2. 0,3 Kgm a Joules
3. 2/5 Kgm a ergios
4. $5,6.10^{-6}$ ergios a Kgm
5. $0,8.10^4$ Joules a ergios
6. 0,25 Kgm a ergios
7. $1,25.10^{12}$ ergios a Joules
8. 3,26 ergios a Kgm
9. $4,36.10^8$ Kgm a Joules
10. $3,862.10^{-3}$ Joules a ergios

Respuestas

1. $1,962.10^8$ ergios
2. 2,943 Joules
3. $3,924.10^7$ ergios
4. $5,7.10^{-14}$ Kgm
5. 8.10^{10} ergios
6. $2,4525.10^7$ ergios
7. $1,25.10^5$ Joules
8. $3,32.10^{-8}$ Kgm
9. $4,27.10^9$ Joules
10. $3,862.10^4$ ergios

Trabajo realizado por una fuerza constante

Si por ejemplo, la fuerza F de la figura 4.5 obliga al cuerpo a desplazarse una distancia "x", ella realizará un trabajo que es "numéricamente igual" **al área del rectángulo cuyos lados son el módulo de la fuerza y el módulo del desplazamiento.**

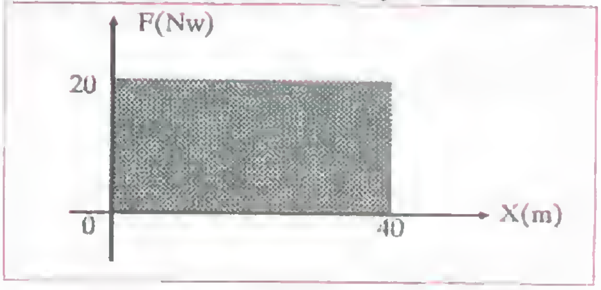


Figura 4.5

$$W = F.x = 20\ N\ .\ 40\ m$$

$$W = 800\ N.m = 800\ J$$

Trabajo realizado por un agente externo contra la gravedad

Observemos la figura 4.6

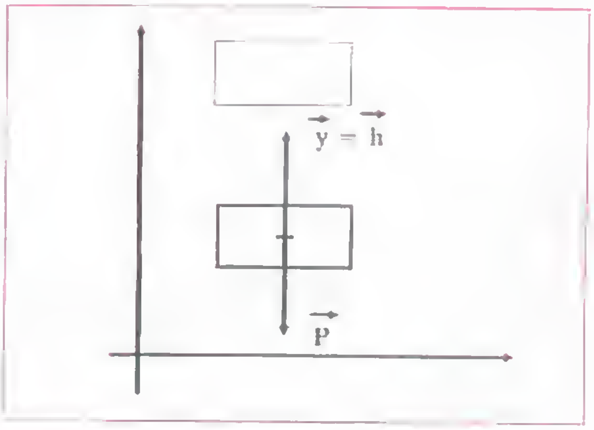


Figura 4.6

Aplicando la ecuación se tiene que:

$$W = P.h$$

$$W = P.h.\cos\alpha$$

Como el movimiento y la componente del peso tiene la misma dirección y sentidos opuestos $\alpha = 180^{\circ}$ se tendrá:

$$W = P.h.\cos 180^{\circ}$$

$$W = -P.h \text{ (por que } \cos 180^{\circ} = -1)$$

Como puede observarse en este caso, el trabajo es negativo, porque la partícula sobre la que actúa la fuerza tiene una componente opuesta a la dirección de la fuerza aplicada.

Trabajo realizado por la gravedad si el cuerpo bajara

Observemos la figura 4.7 y apliquemos la ecuación de trabajo mecánico.

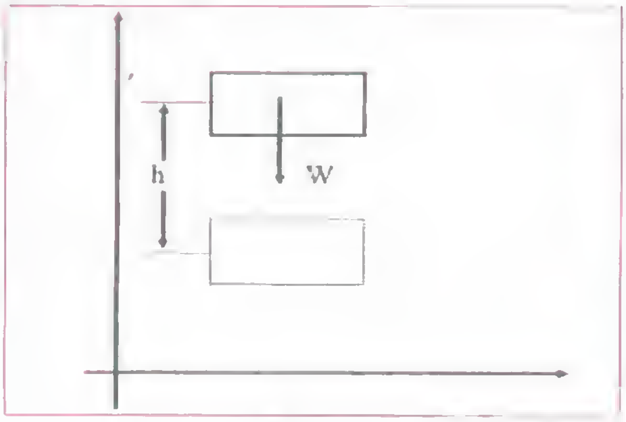


Figura 4.7

$$W = P.h$$

$$W = P.h \cos \alpha$$

Como el movimiento del cuerpo y la componente del peso tienen la misma dirección y sentido $\alpha = 0^{\circ}$

$$W = P.h.\cos 0^{\circ}$$

$$W = P.h \ (\cos 0^{\circ} = 1)$$

Problemas resueltos

Problema 1

En la figura 4.8(a) se muestra un bloque de masa 20 Kg, ubicado sobre un plano inclinado 30°. El se desea levantar hasta una altura de 1,5 m ejerciéndose una fuerza de 600 N. Si el coeficiente de roce cinético es 0,1, calcular: a) El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo b) El trabajo neto realizado.

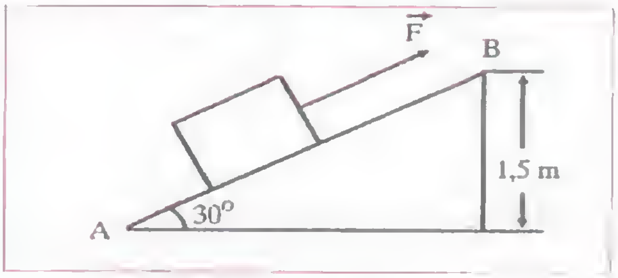


Figura 4.8(a)

Solución

En la figura 4.8(b) se muestran todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque en movimiento.

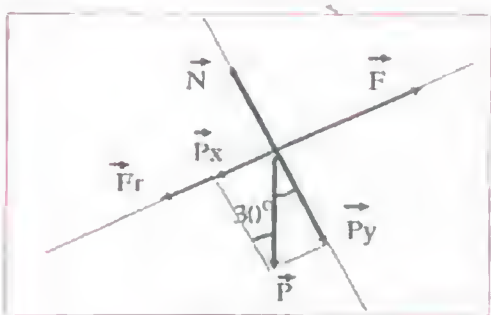


Figura 4.8(b)

F: fuerza horizontal aplicada.

P: Peso del cuerpo

P_x: componente x del peso.

P_y: componente y del peso.

N: fuerza normal.

F_r: fuerza de fricción.

Calculemos la longitud del plano AB a través de la definición de seno:

$$\text{sen } 30^{\circ} = \frac{1{,}5 \text{ m}}{AB}, \qquad \text{de donde}$$

$$AB = \frac{1,5 \text{ m}}{\text{sen } 30^o} = 3 \text{ m}$$

Para poder calcular la magnitud de la fuerza de fricción es necesario calcular primero la magnitud de la fuerza normal.

Como en la dirección vertical no hay movimiento podemos escribir que:

$N - P_y = 0.$

$N - P \cos 30^o = 0.$

$N - mg \cos 30^o = 0.$

$N = mg \cos 30^o.$

$N = 20 \text{ Kg}.9,8 \text{ m/s}.0,5.$

$N = 98 \text{ N}.$

La fuerza de fricción o roce viene dada en magnitud por:

$F_r = \mu_K.N = 0,1.98 \text{ N}.$

$F_r = 9,8 \text{ N}.$

a)Calculemos ahora el trabajo realizado por cada una de las fuerzas actuantes. Las únicas fuerzas que realizan trabajo son las que actúan en la dirección del movimiento.

Trabajo realizado por F

$W_F = F.x.\cos 0^o$

$W_F = 600 \text{ N}. 3 \text{ m}. 1$

$\boxed{W_F = 1800 \text{ J}}$

Trabajo realizado por F_r

El ángulo entre la fuerza de fricción y la dirección del desplazamiento es 180^o por estar aplicada en dirección opuesta al desplazamiento.

$W_{Fr} = F_r.x. \cos 180^o$

$W_{Fr} = 9,8 \text{ N}.3 \text{ m}.(-1)$

$\boxed{W_{Fr} = -29,4 \text{ J}}$

Trabajo realizado por P_x

Aquí el ángulo también es de 180^o por estar aplicada la fuerza en dirección opuesta al desplazamiento.

$W_{Px} = P_x.x.\cos 180^o$

$W_{Px} = m.g.x.\cos 180^o$

$W_{Px} = 20 \text{ Kg}.9,8 \text{ m/s}^2.3\text{m}.(-1)$

$\boxed{W_{Px} = -588 \text{ J}}$

Las fuerzas N y P_y no realizan trabajo por ser perpendiculares a la dirección del movimiento.

b) El trabajo neto realizado viene dado por la suma de los trabajos parciales que son diferente de cero.

$W_t = W_F + W_{Fr} + W_{Px}$

$W_t = 1800 \text{ J} - 29,4 \text{ J} - 588 \text{ J}$

$\boxed{W_t = 1182,6 \text{ J}}$

Este valor es el trabajo realizado por la fuerza neta sobre el bloque, es decir, en el procedimiento hubo una transferencia de 1182,6 J de energía al bloque.

Observaciones

* Si el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es positivo se dice que el cuerpo **gana energía**.

* Si el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es negativo se dice que el cuerpo **cede energía**.

Problema 2

Un bloque de masa 18 Kg está en reposo sobre un plano horizontal, tal como lo indica la figura 4.9(a). Sobre él actúa la fuerza F de magnitud 400 N durante 20 s con una aceleración de 0,05 m/s², desplazándolo en dirección horizontal. Calcular el trabajo total realizado sabiendo que el coeficiente de fricción cinética es 0,2.

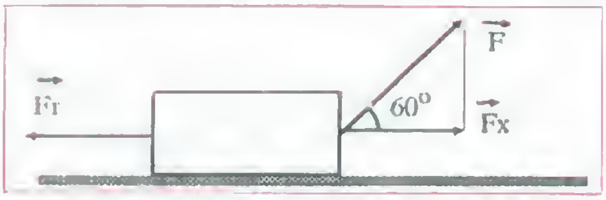


Figura 4.9(a)

Solución

Partiendo de la figura 4.9(a) hacemos un diagrama donde se tienen todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

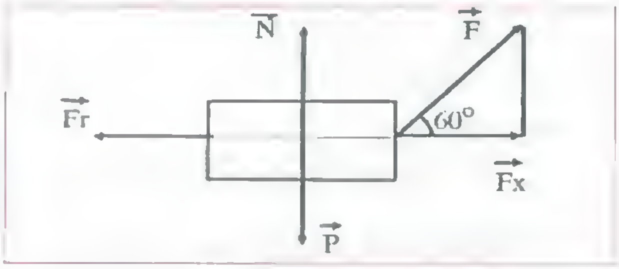


Figura 4.9(b)

· Calculemos la magnitud de la fuerza resultante que actúa en dirección horizontal (F_h)

$$F_h = F_x - F_r$$

$$F_h = F.\cos 60^o - \mu_k.N$$

$$F_h = F.\cos 60^o - \mu_k.mg$$

$$F_h = 400\ N.\cos 60^o - 0{,}2.18\ Kg.9{,}8\ m/s^2$$

$$F_h = 200\ N - 35{,}28\ N$$

$$\boxed{F_h = 164{,}72\ N.}$$

Para poder calcular el trabajo necesitamos la distancia recorrida x. Esta la calculamos por la ecuación

$$x = \frac{a.t^2}{2}$$

$$x = \frac{0{,}05\ m/s^2.(20\ s)^2}{2}$$

$$x = 10\ m$$

Luego el trabajo realizado viene dado por:

$$W = F_h.x.\cos 0^o$$

$$W = 164{,}72\ N.10\ m.\cos 0^o$$

$$\boxed{W = 1647{,}2\ J}$$

Otra forma de hacerlo es calculando el trabajo realizado por cada una de las fuerzas en dirección horizontal y luego sumarlas algebraicamente.

Problemas propuestos

1. Una fuerza de 12 N actúa sobre un cuerpo moviéndolo 7 m. Calcular el trabajo cuando: a) Se mueve en la misma dirección de la fuerza b) Se mueve en la dirección opuesta c) La dirección de la fuerza y la dirección del desplazamiento forman ángulos de 30°; 90° y 120° respectivamente.

R: a) 84 J b) -84 J; c) 72,74 J; 0 J y -42 J

2. Sobre un cuerpo de 10Kp colocado sobre un plano horizontal actúa una fuerza de 12 Kp, la cual forma con la horizontal un ángulo de 30°. Si el cuerpo se mueve con velocidad constante y no se considera la fricción, calcular el trabajo realizado por la fuerza al moverse 8 m.

R: 814,75 J

3. Sobre un bloque de masa 50 Kg colocado sobre un plano horizontal actúa una fuerza de 60 Kp, formando un ángulo de 60° con la dirección positiva del eje x, permitiéndole recorrer 12 m. Si el coeficiente de fricción cinética es 0,2, calcular: a) El trabajo realizado por la fuerza de roce b) El trabajo realizado por la fuerza aplicada c) El trabajo neto d) El trabajo realizado por la normal.

R: a) -1176 J b) 3528 J; c) 2352 J d) 0 J

4. Sobre un plano inclinado 30° se coloca un cuerpo de masa 100 Kg. Sobre él se aplica una fuerza F para que ascienda 10m sobre el plano con una velocidad constante. Calcular el trabajo realizado por dicha fuerza.

R: 4900 J.

5. Un bloque de 100 Kg se desliza desde la parte superior de un plano inclinado 45° hasta llegar a la parte inferior en 1,5 s. Si la magnitud de la fuerza de fricción es 300 N, calcular: a) El trabajo que debe realizar la componente del peso paralela al plano para que el bloque lo recorra todo b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción.

R:a) 3055,95 J b)-1323 J

6. Calcular el trabajo necesario para desplazar un cuerpo de 500 Kg por un plano de 10 m de longitud e inclinado 30° con respecto a la horizontal, suponiendo que:

a) No existen rozamientos y lo hace a velocidad constante.

b) Existen rozamientos, siendo el coeficiente de fricción cinética 0,4.

c) Además de lo anterior se pretende acelerar el cuerpo de 0 a 10 m/s a lo largo del plano.

R: a) 24500 J b) 41500 J c) 66500 J

7. Un bloque de 0,5 Kg se encuentra sobre una superficie horizontal; entre ambos existe rozamiento. Si sobre el bloque, que inicialmente está en reposo, actúa una fuerza horizontal constante de 50 N, se observa que después de 50 m adquiere una velocidad de 1,5 m/s, calcular:
a) El trabajo realizado por la fuerza de fricción
b) El coeficiente de fricción cinética.

R: a) -2499 J b) 10,2

8. Por un plano inclinado de 3 m de altura y 4 m de base, se traslada con velocidad constante un bloque de 100 Kg, mediante una fuerza paralela al desplazamiento (no existe fricción). ¿Qué trabajo habrá realizado el bloque al llegar al final del plano?.

R: 2940 J

9. Se sube una caja de 20 Kg por una pendiente de 30° ejerciéndose una fuerza F a través de una cuerda que forma un ángulo de 45° con el suelo. El coeficiente de fricción entre la caja y el piso es 0,05. Si la caja avanza con velocidad constante de 1 m/s, calcular el trabajo realizado por la fuerza F en 10m.

R: 1064,87 J

10. Se desea arrastrar con velocidad constante un bloque de 2,53 Kg hasta la parte superior de una rampa de 4m de longitud y 2 m de altura.a) ¿Qué trabajo debe realizar la fuerza paralela a la rampa?.

R: 49,588 J

11. Un bloque de masa 15 Kg se desplaza sobre una superficie horizontal con una velocidad de 4 m/s, cuando sobre él actúa una fuerza F que forma con la dirección del desplazamiento un ángulo de 32°, permitiéndole adquirir la velocidad de 10 m/s y una aceleración de 0,6 m/s^2. Si el coeficiente de fricción cinética es 0,3, calcular: a) El trabajo realizado por F. b) El trabajo realizado por la fuerza de fricción.

R: a) 530,88 J b) -441 J

12. Un bloque de 12 Kg es halado sobre un plano inclinado 38° a través de una fuerza de 480 N, paralela a la superficie del plano. Sabiendo que la altura del plano es 4 m y el coeficiente de fricción cinética es 0,18, calcular el trabajo realizado por: a) La fuerza horizontal aplicada b) La componente horizontal del peso del cuerpo c) La fuerza de roce.

R: a) 3118,56 J b) -470,38 J c) -108,37 J.

4.5 Potencia mecánica. Unidades

En la definición de trabajo mecánico no se hizo referencia a la variable tiempo; no se dice en cuánto tiempo se lleva a cabo el proceso de transferencia de energía. Un obrero con pico y pala, al igual que una excavadora, sería capaz de abrir un zanja para cimentar una construcción. Ambos sistemas realizan el mismo trabajo, sólo que la máquina lo hace en menor tiempo que el obrero.

Supóngase que a través de dos personas, aplicando fuerzas en el extremo de un hilo que pasa por una polea, se desea elevar un bloque desde la posición A hasta la posición B, distantes entre sí 5 m (figura 4.10). Como puede notarse, ambas realizan el mismo trabajo mecánico, porque están elevando el mismo peso a una misma altura. Sin embargo, la persona que lo haga en menor tiempo (más de prisa), tendrá **más potencia**, por que hizo el mismo trabajo mecánico en el menor tiempo.

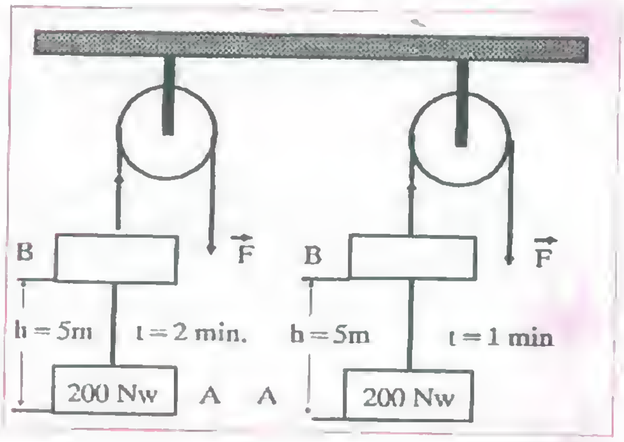


Figura 4.10

Esto nos indica que debemos disponer de una magnitud física que nos dé **la rapidez con que se realiza el trabajo**. Para ello se introduce el concepto de potencia mecánica, definiéndose así:

La potencia mecánica es el trabajo mecánico realizado en cada unidad de tiempo.

Si W es el trabajo mecánico y t el tiempo empleado, podemos escribir la ecuación de la potencia mecánica así:

$$P = \frac{W}{t}$$

Por otra parte sabemos que cuando el movimiento y la fuerza aplicada coinciden en dirección y sentido se tiene que:

$$W = F.x$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

$$\boxed{P = \frac{F.x}{t}}$$

Potencia en función de velocidad media

La ecuación anterior viene dada por

$$P = \frac{F.x}{t} = F.\frac{x}{t}$$

Como $\frac{x}{t} = V_m$ se tendrá que:

$$\boxed{P = F.V_m}$$

Unidades de potencia mecánica

Como la potencia es la relación entre el trabajo realizado y el tiempo empleado, se tendrá que una unidad de potencia será el cociente entre una unidad de trabajo y una unidad de tiempo.

Veamos el cuadro en los diferentes sistemas:

Sistema	Ecuación	Unidades
c.g.s	$P = W/t$	ergio/s
M.K.S	$P = W/t$	Joule/s = vatio
Técnico	$P = W/t$	Kgm/s

Un vatio(W) es la potencia desarrollada cuando se realiza el trabajo de un joule en cada segundo.

Unidades prácticas

Caballo de vapor (C.V)

Caballo de fuerza(H.P)

Kilovatio(Kw)

Equivalencias

$1\ Kw = 10^3\ w$

$1\ C.V = 75\ Kgm/s$

$1\ H.P = 76\ Kgm/s$

El kilovatio hora

Si de la ecuación de potencia mecánica despejamos W nos queda:

$$W = P.t$$

Si $P = 1\ Kw$ y $t = 1h$

$$W = 1\ Kw.1\ h$$

$$W = 1\ Kwh$$

El kilovatio hora (Kwh) es el trabajo realizado cuando se desarrolla la potencia de un kilovatio en una hora.

Equivalencia entre el Kwh y el Joule

Partimos de KWh, el cual se descompone así:

$$1\ Kwh = 1\ Kw\ .\ 1\ h$$

$$1\ Kwh = 10^3 W\ .\ 36.10^2\ s$$

$$1\ Kwh = 36.10^5\ \frac{Joule}{s}\ .\ s$$

$$\boxed{1\ Kwh = 36.10^5\ Joules}$$

Equivalencia entre el C.V y el vatio(W)

$$1\ C.V = 75\ \frac{Kgm}{s}$$

Si transformamos Kgm/s a Joule/s nos queda:

$$1\ C.V = 75.9,8\ \frac{Joule}{s} = 735,75\ W$$

Como 735,75 puede aproximarse a 736 escribimos:

$$\boxed{1\ C.V = 736\ W}$$

Resumen de equivalencias

$$1\ C.V \begin{cases} \longrightarrow 75\ Kgm/s \\ \longrightarrow 736\ W \end{cases}$$

$$1\ Kwh \xrightarrow{36.10^5} Joules$$

$$1Kw \xrightarrow{10^3} W$$

Ejercicios resueltos

1. Transformar 2,5 C.V a Kgm/s

Para transformar C.V a Kgm/s debemos multiplicar por 75, porque va en el mismo sentido de la flecha.

$$2{,}5\ C.V = 2{,}5.75\ Kgm/s$$
$$= 187{,}5\ Kgm/s$$

2. Transformar 1200 Kw a C.V

Debemos hacerlo en dos etapas a) y b)

a) 1200 Kw a W multiplicando por 10^3

$$1200\ Kw = 1200.10^3\ W$$

b) 1200.10^3 W a C.V, dividiendo entre 736

$$\frac{1200.10^3}{736}\ C.V = 1{,}63.10^3\ C.V$$

3. Transformar $1{,}5.10^8$ ergios a Kwh

Transformamos primero los ergios a Joules y luego éstos a Kwh.

a) $1{,}5.10^8$ ergios a Joules

$$\frac{1{,}5.10^8}{10^7}\ Joules = 15\ Joules$$

b) 15 Joules a Kwh dividiendo entre 36.10^5

$$\frac{15}{36.10^5}\ Kwh = 4{,}16.10^{-6}\ Kwh$$

4. 28 erg/s a Kgm/s

Nótese que los ergios en el numerador deben ser transformados a Kgm, transformándolos primero en joules y luego en Kgm. En el denominador el tiempo permanece igual:

$$28\ \frac{erg}{s} = 28.\ 1^{-7}\ \frac{Joule}{s}$$

Dividimos luego entre 9,81 para expresarlo en Kgm/s

$$28.10^{-7}\ \frac{Joule}{s} = \frac{28.10^{-7}}{9{,}81}\ Kgm/s$$
$$= 2{,}85.10^{-7}\ \frac{Kgm}{s}$$

Problemas propuestos

Efectuar las transformaciones siguientes:

1. 20 Kgm/s a W
2. 1,5 C.V a erg/s
3. 216.10^7 Joules a Kwh.
4. 21,582 Kw a erg/s
5. 183,5 Kgm a Kwh
6. 22,08 Kw a C.V
7. 4/5 C.V a W
8. 12,5 erg/s a C.V
9. 4,5 W a Kgm/s
10. 1000 Kgm/s a C.V

Respuestas

1. 196,2 W
2. $1{,}104.10^{10}$ erg/s
3. 600 Kwh
4. $2{,}158.10^{11}$ erg/s

5. 5.10^{-4} Kwh.

6. 0,00003 C.V

7. 588,8 W

8. $1,7.10^{-9}$ C.V

9. 0,458 Kgm/s

10. 13,33 C.V

Problemas resueltos

1. ¿Cuál es la potencia desarrollada en C.V por el motor de una grúa que levanta 1000 Kp a una altura de 20 m en 40 s?.

Datos

P = ? (C.V) x = 20 m

F = 1000 Kp t = 40 s

Solución

La fórmula que usaremos es:

$$P = \frac{F.x}{t}$$

Sustituyendo los datos en la fórmula nos queda:

$$P = \frac{1000\ Kp.20\ m}{40\ s} = \frac{20000\ Kgm}{20\ s}$$

$$P = 500\ Kgm/s$$

Como el resultado nos los piden en C.V, procedemos a transformar 500 Kgm/s a C.V, para lo cual nos bastará con dividir entre 75.

500 Kgm/s = 500/75 C.V = 6,6 C.V

2. Un motor de 800 W trabaja durante 2 horas y media. ¿Qué trabajo realiza en Joules y Kwh?.

Datos

P = 800 W
t = 2,5 h
= 2,5.3600 s
t = 9000 s
W = ?

Solución

Usemos la ecuación P = W/t y despejemos W, quedándonos que:

$$W = P.t$$

Sustituyendo por sus valores tenemos:

$$W = 800\ W\ .\ 9000\ s$$

$$W = 800\ \frac{Joule}{s}\ .\ 9000\ s$$

$$\boxed{W = 7200000\ Joules}$$

Como nos piden el resultado en Kwh transformamos 7200000 Joules a Kwh así:

$$7200000\ Joules = \frac{7200000}{36.10^5}\ Kwh$$

$$\boxed{= 2\ Kwh}$$

3. Una grúa eleva un peso de 400 Kp con una velocidad de 2 m/s. ¿Qué potencia desarrolla en Kw y C.V?

Datos

F = 400 Kp
V = 2 m/s
P = ? (Kw y C.V)

Solución

La potencia aquí depende de la velocidad, por lo que escribimos:

$$P = F.V$$

Sustituyendo valores nos queda:

$$P = 400\ Kp.2\ m/s$$

$$P = 800\ Kgm/s$$

Como nos piden el resultado en Kw y C.V, bastará con hacer las transformaciones correspondientes:

$$800\ Kgm/s\ a\ C.V = \frac{800}{75}\ C.V$$

$$\boxed{= 10,6\ C.V}$$

Estos 10,6 C.V los transformamos en vatios(W) y después en Kw

$10{,}6\ C.V = 10{,}6.736\ W = 7801{,}6\ W$

$$7801{,}6\ W = \frac{7801{,}6}{10^3} = 7{,}80106\ Kw$$

4. Se desea llenar un depósito de agua cuya capacidad es 12 m^3, situado 10 m de altura, con un motor de 1,5 C.V. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo?.

Datos

$F = 12.10^3\ Kp$	$x = 10\ m$
$P = 1{,}5\ C.V$	$t = ?$
$= 1{,}5.75\ Kgm/s$	
$= 112{,}5\ Kgm/s$	

Solución

Recordemos la equivalencia:

$1\ dm^3 = 1\ Kp = 1$ litro

Como la capacidad está dada en m^3, bastará con transformar:

$12\ m^3$ a dm^3

$12\ m^3 = 12.10^3\ dm^3 = 12.10^3\ Kp$

Luego,

$F = 12.10^3\ Kp$

Nótese que 1,5 C.V se transformaron en 112,5 Kgm/s.

Usamos la expresión:

$$P = \frac{F.x}{t}$$

Despejando t se tiene que:

$$t = \frac{F.x}{P}$$

Sustituyendo F, x y P por sus valores, tenemos:

$$t = \frac{12.10^3\ Kp.10\ m}{112{,}5\ Kgm/s}$$

$$t = \frac{12.10^4\ Kgm}{112{,}5\ Kgm/s}$$

$t = 1066{,}6\ s$

Problemas propuestos

1. Una grúa A eleva un peso de 12000 Newton a una altura de 6 m en 30 s. Otra grúa B eleva un peso de 9000 Newton a 10 m de altura en 20 s. Calcúlese la potencia que desarrolla cada una de ellas. ¿La que desarrolla mayor potencia es a la vez la que desarrolla mayor fuerza?. Razona tu respuesta.

R: 2400 W; 4500 W.

2. ¿Qué trabajo en joules realizará en 2 horas un motor que desarrolla una potencia de 5Kw?.

R: $3{,}6.10^7$ Joules.

3. ¿Que motor realiza más trabajo, uno de 50 W durante 4 horas o uno de 8 C.V en 3 minutos?

R: el de 8 C.V trabajando 3 min.

4. Un motor eléctrico de 12 C.V trabaja durante 10 horas. ¿Cuántos Kwh desarrolla?.

R: 88,32 Kw.

5. ¿En cuánto tiempo un motor de 0,5 C.V realiza un trabajo de 100 Joules?.

R: 0,27 Joules.

6. ¿Cuántos litros de agua puede sacar el motor de una bomba de 1,8 C.V, de un pozo de 2,5 m de profundidad en 12 minutos?.

R: 38880 litros.

7. ¿En cuánto tiempo un motor de 2 C.V puede llenar con agua un depósito de 9 m^3, situado a 10 m de altura?.

R: 600 s.

8. Hallar la potencia en Kw desarrollada por el motor de un automóvil que se desplaza con una rapidez de 72 Km/h, siendo 18000 Kp la fuerza de tracción.

R: 3528 Kw.

9. ¿Cuál es la velocidad que desarrolla un automóvil cuyo motor tiene una potencia de 318 C.V y la fuerza de tracción es 11702,4 New?.

R: 20 m/s

10. Un hombre de 73 Kg sube por un plano inclinado de 12° con respecto a la horizontal, a una velocidad de 1,5 m/s. Calcular la potencia desarrollada.

R: 218,30 W

11. Con un motor cuya potencia es 4 C.V se elevan 30 m^3 a cierta altura en 30 minutos. Calcular esa altura.

R: 18 m.

12. Se desea llenar un depósito de agua situado a 12 m de altura. Las dimensiones de dicho depósito son 5 m de largo, 2 m de altura, y 1,5 m de ancho. ¿Cuál debe ser la potencia en Kw de un motor para que lo llene en 10 horas?.

R: 0,049 Kw

13. Calcular la potencia mecánica en vatios, cuando se efectúa un trabajo de 3200 ergios en 2 minutos.

R: $2{,}66.10^{-6}$ W.

14. Un motor puede realizar un trabajo de 21600 Kgm en 8 horas y 30 minutos. Calcular la potencia desarrollada en C.V.

R: 0,00939 C.V.

15. Calcular cuántos litros de agua puede extraer el motor de una bomba de 3/4 H.P, de un pozo de 4 m de profundidad en 1/4 de hora.

R: 12673,46 litros

16. ¿En cuánto tiempo un motor de 3 C.V es capaz de llenar con agua un depósito de 9 m^3 situado a una altura de 7 m?.

R: 280 s.

4.6 Energía mecánica

Antes de dar una definición veamos algunos ejemplos:

El agua contenida en una represa al ponerse en movimiento es capaz de hacer girar una turbina, generando así un trabajo. El agua contenida en la represa posee una energía.

La energía contenida en la gasolina de un automóvil permite que el motor realice una fuerza y sea capaz de recorrer un camino, efectuando un trabajo.

Cuando se estira un arco para lanzar una flecha, él tiene una energía que puede cederla a la flecha, la cual a su vez recorre un camino. Ha realizado un trabajo.

Como puede notarse, los cuerpos o los sistemas poseen la capacidad para realizar trabajo, es decir, están dotados de energía.

Podemos decir:

La energía es la capacidad que tienen los cuerpos o los sistemas para realizar un trabajo.

Como puede notarse, la energía se mide por el trabajo que es capaz de realizar o por el trabajo que se ha realizado, es decir, la energía es la medida del trabajo.

Las unidades de la energía son las mismas del trabajo, puesto que el trabajo es la medida de la energía transferida.

Haremos un estudio de tres tipos de energía: **energía cinética, energía potencial gravitacional, energía potencial elástica.**

Energía cinética

La energía cinética es la capacidad que tienen los cuerpos de realizar un trabajo en virtud de su movimiento

Tratemos de deducir la ecuación de la energía cinética. Para ello nos remitiremos a la figura 4.11. En ella se muestra un bloque de masa m, en reposo sobre un plano horizontal.

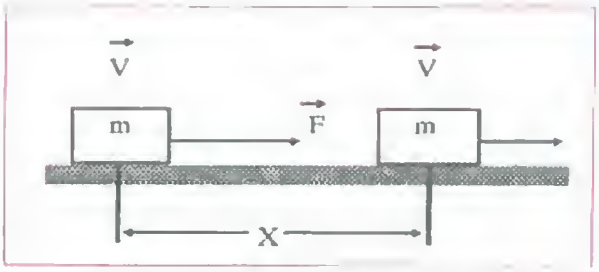


Figura 4.11

Al aplicar sobre el bloque una fuerza no equilibrada de magnitud F, éste se pone en movimiento recorriendo una distancia x en la misma dirección

de la fuerza, realizando un trabajo mecánico. El trabajo realizado viene dado por la ecuación:

$$W = F.x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, al aplicar una fuerza sobre un cuerpo de masa m, éste adquiere una aceleración que viene dada por la ecuación:

$$F = m.a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por ser el cuerpo acelerado desde el reposo, la distancia x en un instante de tiempo t viene dada por:

$$x = \frac{at^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (2) en (1) nos queda que:

$$W = m.a.\frac{at^2}{2} = \frac{1}{2} m\, a^2 t^2$$

$$W = \frac{1}{2} m\, (at)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Sabemos, que cuando un cuerpo se acelera desde el reposo, la velocidad V al cabo de un cierto tiempo t será:

$$V = at \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) nos queda:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m\, V^2}$$

Relación entre trabajo y energía

Consideremos una fuerza constante de módulo F, que actúa sobre el bloque de masa m de la figura 4.12

Supongamos que el bloque tiene una velocidad V_o en el instante t_o y que por efecto de la fuerza durante un tiempo t posterior adquiere una velocidad V

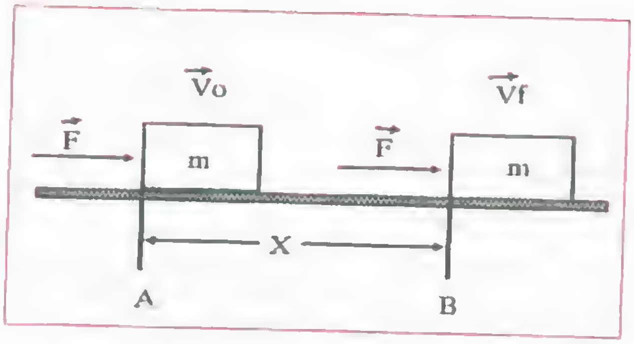


Figura 4.12

Las energías cinéticas respectivas en los puntos A y B serán:

$$Ec(A) = \frac{1}{2} m\, (V_o)^2 \qquad Ec(B) = \frac{1}{2} m.(V_f)^2$$

La variación de la energía cinética es

$$\Delta\, Ec = Ec(B) - Ec\,(A)$$

$$\Delta\, Ec = \frac{1}{2} m.(V_f)^2 - \frac{1}{2} m.(V_o)^2$$

Si tomamos factor común 1/2 m nos queda:

$$\Delta\, Ec = \frac{1}{2} m\left(V_f^{\,2} - V_o^{\,2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Como la fuerza aplicada sobre la masa m es constante el movimiento es uniformemente acelerado, de aceleración a y desplazamiento x

La velocidad Vf en el punto B, de acuerdo a una ecuación de la cinemática del movimiento rectilíneo, es:

$$V_f^{\,2} = V_o^{\,2} + 2ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) nos queda:

$$\Delta\, Ec = \frac{1}{2} m\left(V_o^{\,2} + 2ax - V_o^{\,2}\right)$$

$$\Delta\, Ec = \frac{1}{2} m.2ax = max$$

Por la segunda ley de Newton $F = m.a$, escribimos que:

$$\Delta\, Ec = F.x = W$$

Luego:

$$Ec_B - Ec_A = W$$

Esta expresión nos indica que la variación de la energía cinética mide el trabajo realizado y recibe el nombre de **teorema de las fuerzas vivas** o **teorema trabajo-energía**.

Su enunciado es como sigue:

El trabajo neto realizado por una fuerza que actúa sobre un cuerpo es igual a la variación que experimenta su energía cinética

Observaciones

1. Aquí no debe haber variación de otro tipo de energía.

2. Toda partícula con velocidad puede realizar trabajo, pero únicamente lo realiza cuando pierde parte de esa energía cinética. La energía cinética perdida es igual al trabajo realizado.

3. La importancia que reviste este teorema es evidente, pues nos permite la resolución de problemas de dinámica sin necesidad de tener que recurrir a fuerzas, aceleraciones, desplazamientos, trayectorias etc.

Diferencias entre la energía cinética y la cantidad de movimiento.

A pesar de que la cantidad de movimiento y la energía cinética tiene similitud en cuanto a su dependencia de la masa y la velocidad, es necesario aclarar sus diferencias.

1. Mientras la **energía cinética** está en función del cuadrado de la velocidad, la **cantidad de movimiento** está dada en función de la velocidad.

2. **La energía cinética** es una magnitud escalar, independiente de la dirección de la velocidad, **la cantidad de movimiento** es una magnitud vectorial que depende de la dirección de la velocidad.

3. Como la masa es positiva y el cuadrado de la velocidad siempre es positivo **La energía cinética** siempre será positiva, en cambio **la cantidad de movimiento** puede ser positivo o negativo, pues depende de la dirección de la velocidad en un sistema de referencia.

Energía potencial

Veamos cuáles son los cuerpos dotados de energía potencial, para luego dar una definición.

a) El agua contenida en un embalse o represa situada a cierta altura posee energía potencial, puesto que al ser atraída por la gravedad cuando se abren las compuertas, hará girar una turbina y será capaz de desarrollar un trabajo.

b) Dos cuerpos unidos entre sí por un resorte comprimido, figura 4.13(a), poseen energía potencial. Tan pronto se les deje libre se moverán realizando trabajo, figura 4.13(b).

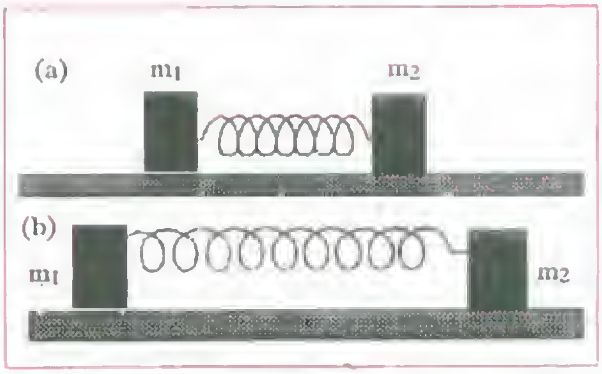


Figura 4.13

El agua contenida en el embalse obtuvo algo como consecuencia de haber ganado altura y los cuerpos unidos a través del resorte también obtuvieron algo por el hecho de haberse estirado el resorte. Ese algo es energía.

Podemos decir que los objetos están dotados de energía debido a la posición que ocupan con respecto a otros cuerpos.

Esta energía de posición o de configuración (caso del resorte) se llama energía potencial, por lo que podemos definir:

La energía potencial es la capacidad que posee un cuerpo para realizar un trabajo, por efecto de su posición o configuración.

Fuerzas conservativas

Observemos la figura 4.14, donde un cuerpo de masa m puede ser trasladado entre los puntos B y A por diferentes caminos.

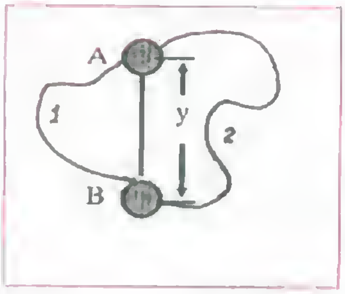


Figura 4.14

Tratemos de calcular el trabajo realizado po el cuerpo al ir entre las dos posiciones. La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza de gravedad mg dirigida hacia abajo.

Cuando el cuerpo se mueve hacia arriba desde B hacia A siguiendo el camino (1) el trabajo realizado es negativo, ya que la fuerza mg es opuesta a la dirección del movimiento, pudiéndose escribir que:

$$W_{AB} = -mgy$$

Cuando el cuerpo se mueve hacia abajo desde A hacia B siguiendo el mismo camino (1) el trabajo realizado es positivo porque la fuerza aplicada mg actúa en la dirección del movimiento, pudiéndose escribir que:

$$W_{BA} = mgy$$

El trabajo total realizado W_t es:

$$W_t = W_{AB} + W_{BA}$$

$$W_t = (-mgy) + mgy$$

$$W_t = 0$$

Si se varia la trayectoria entre los puntos A y B y lo hacemos por el camino (2), también el trabajo realizado sería igual a cero. Esto nos indica que el trabajo realizado entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida.

Esas fuerzas, como las gravitacionales, que poseen la propiedad de que su trabajo en un camino cerrado es cero reciben el nombre de **fuerzas conservativas**.

Una fuerza es conservativa si el trabajo realizado entre dos puntos depende solamente de la posición de esos puntos y es independiente de la trayectoria seguida.

También pude decirse que:

Una fuerza conservativa es aquella que aplicada a un cuerpo realiza un trabajo nulo si la trayectoria es cerrada.

Son fuerzas conservativas: las fuerzas gravitatorias (peso), las fuerzas eléctricas, las fuerzas elásticas.

Fuerzas no conservativas o disipativas

Supóngase que ahora los caminos (1) y (2) poseen fricción o roce. Al ocurrir esto, el trabajo realizado para ir entre dichos puntos por trayectorias de diferentes longitudes será diferente, por lo que ahora el trabajo sí depende de la trayectoria. A ésta fuerza, como la fuerza de fricción, donde se verifica lo explicado se le dice que es una fuerza no conservativa.

Una fuerza es no conservativa o disipativa sí el trabajo realizado por dicha fuerza sobre un cuerpo que se mueve entre dichos puntos depende de la trayectoria seguida.

La fuerza de roce es una fuerza no conservativa.

Energía potencial gravitatoria

Observemos la figura 4.15, donde se muestra una esfera de masa m, la cual se desea trasladar verticalmente desde la posición (1), situada a una altura Y_1, hasta la posición (2), situada a una altura Y_2.

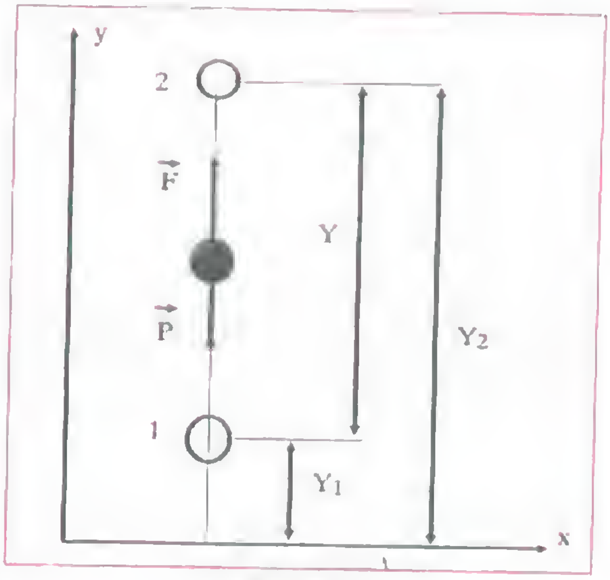


Figura 4.15

La distancia Y que se traslada en dirección vertical viene dada por:

$Y = Y_2 - Y_1$ ....(1)

La elevación de este cuerpo debe hacerse a **velocidad constante** con el fin de no variar su energía cinética. De acuerdo a esto la fuerza resultante que actúa sobre la esfera es cero, ya que para la fuerza externa F y el peso mg se debe cumplir que:

$F + mg = 0$ de donde

$F = - mg$ ....(2)

El trabajo realizado por la fuerza F viene dado por:

$W = F.Y$

$W = F.Y.\cos 0^\circ$

$W = F.Y$ ....(3)

Sustituyendo las expresiones (1) y (2) en (3) se tiene que:

$W = (- mg)(Y_2 - Y_1)$

$W = -(mgY_2 - mgY_1)$

Si llamamos mgY_2 **energía potencial final** (Ep_2) y mgY_1 **energía potencial inicial** (Ep_1), podemos escribir que:

$W = -(Ep_2 - Ep_1)$

$W = (Ep_1 - Ep_2) = -\Delta Ep$

$\boxed{W = -\Delta Ep.}$

De aquí se puede decir que:

El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre un cuerpo es igual a la variación de la energía potencial del cuerpo sobre el que actúa.

Este enunciado es conocido con el nombre de **Teorema de la energía potencial.**

Observaciones

Es conveniente hacer énfasis en la diferencia entre este teorema y el teorema de la energía cinética:

El teorema de la energía potencial es válido únicamente para fuerzas conservativas, en cambio el de la **energía cinética** tiene validez para todo tipo de fuerzas, sean conservativas o no.

Para cualquier cuerpo de masa m, situado a una altura Y respecto de un referencial, en un campo gravitacional **g**, la energía potencial viene dada por la expresión:

$\boxed{Ep = mgY}$

Energía potencial elástica

Consideremos una masa ligada horizontalmente a un resorte, tal como se observa en la figura 4.16(a). Al aplicar una fuerza F sobre la masa, a fin de estirar el resorte, logramos que la masa m se desplace respecto a la posición x = 0 que ocupaba inicialmente.

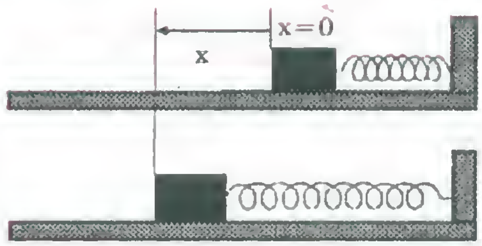


Figura 4.16(a)

Si se realiza un movimiento con **velocidad constante**, es evidente que la masa no gana energía cinética. Tampoco gana energía potencial porque el movimiento se realiza horizontalmente.

Si dejamos la masa en libertad, luego de haberla separado de su posición inicial, ésta regresa hacia dicho punto, convirtiendo el tipo de energía que poseía en energía cinética.

La fuerza ejercida según la ley de Hooke es:

$\boxed{F = -k.x}$

donde F es la fuerza ejercida por el resorte, x el desplazamiento y k la constante de proporcionalidad o constante de elasticidad del resorte.

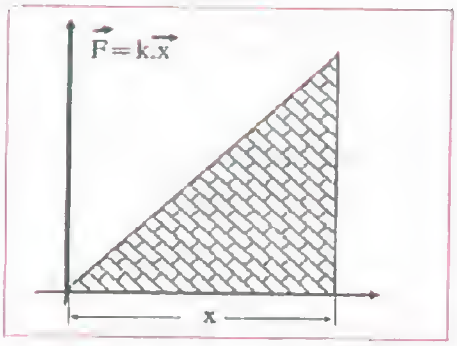


Figura 4.16(b)

En la figura 4.16(b) calculamos el área bajo la curva para una compresión x, y ésta área corresponde a la medida de la energía transferida cuando empujamos el resorte, y por lo tanto será igual al trabajo realizado cuyo valor es numéricamente igual al área del triángulo.

$$W = \frac{1}{2} F.x$$

$$W = \frac{1}{2} K.x.x \ (F = kx) \qquad \text{Luego}$$

$$W = \frac{1}{2} k\,x^2$$

El trabajo realizado sobre el sistema masa-resorte incrementa su energía en una cantidad igual a:

$$\boxed{Ep_e = \frac{1}{2} k\,x^2}$$

Esta energía es llamada **energía potencial elástica del sistema masa-resorte**

Unidades de energía

La energía de un cuerpo es medida por el trabajo que es capaz de producir, razón por la cual la energía se mide en las mismas unidades de trabajo mecánico.

Unidad	Sistema
c.g.s	ergio
M.K.S	Joule
Técnico	Kgm-Kwh

Principio de conservación de la energía mecánica

Supongamos que sobre un cuerpo actúan únicamente fuerzas conservativas cuando se va a trasladar entre dos puntos P_1 y P_2, tal como se indica en la figura 4.17

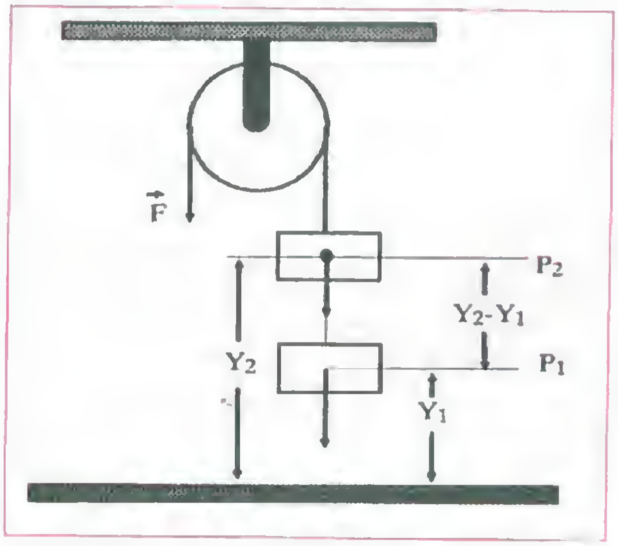


Figura 4.17

El trabajo realizado entre las posiciones P_1 y P_2, de acuerdo con el teorema de la energía cinética viene dado por la expresión:

$$W = Ec \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

De acuerdo con el teorema de la energía potencial, el trabajo viene dado por:

$$W = -Ep \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Como ambas expresiones representan el mismo trabajo se podrán igualar (A) y (B), escribiéndose que:

$$Ec = -Ep \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Esto significa que el aumento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial.

Por otra parte sabemos que

$$\Delta Ec = Ec_2 - Ec_1 \ldots\ldots (D)$$

$$-\Delta Ep = Ep_1 - Ep_2 \ldots\ldots (E)$$

Sustituyendo (D) y (E) en (C) se tendrá que:

$$Ec_2 - Ec_1 = Ep_1 - Ep_2$$

Si transportamos términos nos queda:

$$Ec_2 + Ep_2 = Ec_1 + Ep_1$$

Esto expresa que la suma de las energías cinética y potencial en la posición (2) es igual a la suma de las energías cinética y potencial en la posición (1).

$$Ec + Ep = \text{constante}$$

La suma de la energía cinética y potencial recibe el nombre de energía mecánica total Em del cuerpo.

En conclusión:

> Si sobre un cuerpo actúan únicamente fuerzas conservativas, su energía mecánica total-suma de la energía cinética y potencial- permanece constante durante el movimiento, es decir, se conserva.

Un aumento en la energía cinética Ec del cuerpo llevará consigo una disminución equivalente en su energía potencial Ep o viceversa, para que la suma de ambos términos permanezca constante.

Principio de conservación de la energía.

La conservación de la energía es un principio fundamental de gran importancia en la física. En su forma general abarca a otras formas de energía, además de las mecánicas potencial y cinética.

Si un bloque se desliza sobre un piso y sobre él actúa la fuerza de fricción cinética (fuerza disipativa) se comprobaría que su energía mecánica no permanece constante (disminuye), observándose un calentamiento en el cuerpo. En este caso, la energía mecánica desaparecida se transforma en calor, la cual es también una forma de energía.

Los cuerpos por sí solos no poseen energía, pues, si la tienen es por que la han adquirido de otros y no creada por ellos mismos. Ellos ceden la que tienen, diciéndose que la pierden pero no será destruida.

De acuerdo a las observaciones se puede enunciar el principio de la conservación de la energía así:

> **La energía no se crea ni se destruye; sólo puede ser transformada de una forma a otra**

Como puede observarse, la conservación de la energía mecánica constituye un caso particular del principio de conservación de la energía.

Problemas resueltos

Problema 1

Desde una altura de 560 m, como lo indica la figura 4.18, se lanza verticalmente y hacia abajo un objeto de 50 Kg con una velocidad de 240 m/s. Calcular, usando consideraciones energéticas, la velocidad en el instante en que el objeto toca el suelo. Usar $g = 9{,}8\ m/s^2$.

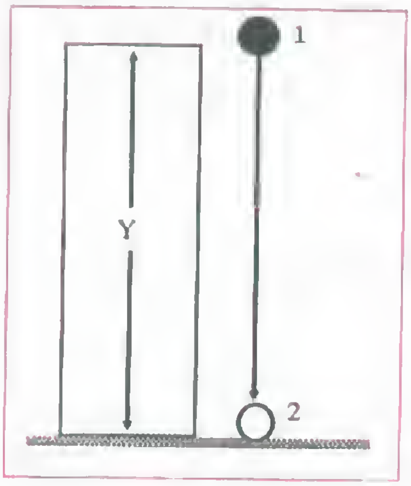


Figura 4.18

Datos e incógnitas

$V_1 = 240\ m/s$
$Y = 560\ m$
$m = 50\ Kg$
$g = 9{,}8\ m/s^2$
$V_2 = ?$

Solución

Como el sistema tierra cuerpo es conservativo, se tiene de acuerdo al principio de conservación de la energía mecánica que la energía mecánica del cuerpo es constante; en particular, la energía mecánica inicial (posición 1) es igual a la energía mecánica final (posición 2).

De acuerdo a lo analizado podemos escribir:

$$Em_1 = Em_2$$

$$Ec_1 + Ep_1 = Ec_2 + Ep_2$$

Como la energía potencial en (2)(Ep_2) es cero, por no tener altura, podemos escribir que:

$$Ec_1 + Ep_1 = Ec_2$$

Sustituyendo Ec_1, Ep_1 y Ec_2 por sus ecuaciones tenemos:

$$\frac{1}{2} m(V_1)^2 + m\,g\,Y = \frac{1}{2} m\,(V_2)^2$$

Eliminando denominadores tenemos:

$$2mgY + m\,(V_1)^2 = m\,(V_2)^2$$

Sacando m factor común nos queda:

$$m[2gY + (V_1)^2] = m\,(V_2)^2$$

Simplificando por m nos queda:

$$2gY + (V_1)^2 = (V_2)^2$$

Despejando V_2 se tiene que:

$$(V_2)^2 = (V_1)^2 + 2gY$$

Sustituyendo por sus valores

$$V_2 = \sqrt{(240\ m/s)^2 + 2.9{,}8\ m/s^2 .\ 560\ m}$$

Efectuando operaciones y extrayendo raíz cuadrada obtenemos:

$$\boxed{V_2 = 261{,}87\ m/s}$$

Problema 2

Se lanza un móvil con una velocidad de 80 m/s hacia la parte superior de un plano inclinado (figura 4.19). ¿A qué altura h medida sobre el plano horizontal se detiene?. Se desprecia el roce.

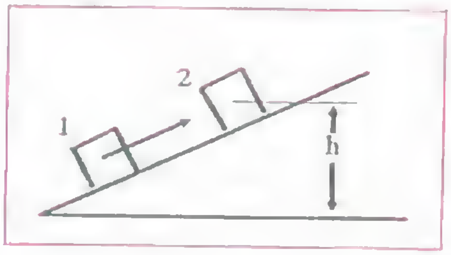


Figura 4.19

Datos

$V_o = 80\ m/s$
$g = 9{,}8\ m/s^2$
$h = ?$

Solución

Al no existir ninguna fuerza actuando sobre el cuerpo se puede aplicar el principio de la conservación de la energía mecánica, escribiéndose que:

$$Ec_1 + Ep_1 = Ec_2 + Ep_2$$

Las energías cinética y potencial en la posición (1) vienen dadas por:

$$Ec_1 = \frac{1}{2} m\,V^2$$

$$Ep_1 = 0$$

Las energías cinética y potencial en la posición (2) vienen dadas por:

$$Ec_2 = 0$$

$$Ep_2 = mgh$$

Sustituyendo en la expresión general se tendrá que:

$$\frac{1}{2} mV^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$\frac{1}{2} mV^2 = mgh$$

Simplificando m y despejando h nos queda:

$$h = \frac{V^2}{2g}$$

$$h = \frac{(80\ m/s)}{2.9{,}8\ m/s^2}$$

$$\boxed{h = 326{,}53\ m}$$

Problema 3

En la figura 4.20(a) se muestra un bloque de masa 20 Kg que es lanzado por un plano inclinado 37° con una velocidad de 20 m/s. Calcular la distancia que recorre hasta detenerse, sabiendo que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es 0,2. Resolverlo por consideraciones energéticas.

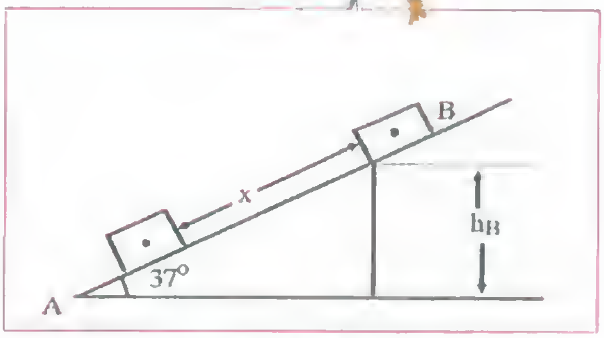


Figura 4.20(a)

Solución

Se tomará como estado inicial el instante en que el cuerpo se lanza a 20 m/s (punto A) y como instante final cuando se detiene en el punto B.

En la figura 4.20(b) se muestra en un diagrama de cuerpo libre las fuerzas actuantes.

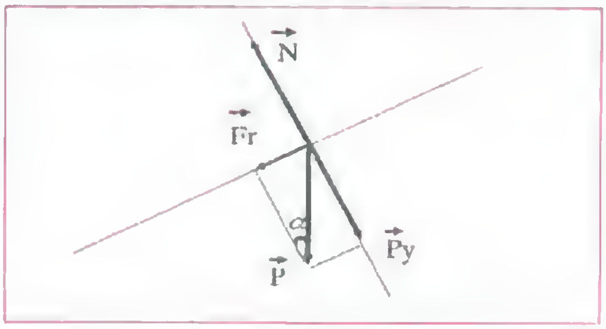


Figura 4.20(b)

Como la fuerza de roce es una fuerza no conservativa ella realiza un trabajo W_r y la pérdida de energía mecánica es igual al trabajo realizado por la fuerza de roce, pudiéndose escribir que:

$$Em_B - Em_A = W_r \text{.....................................(1)}$$

Sabemos que:

$$Em_B = Ec_B + Ep_B$$

$$Em_B = 0 + Ep_B$$

$$Em_B = Ep_B = mgh_B \text{...........................(2)}$$

$$Em_A = Ec_A + Ep_A$$

$$Em_A = Ec_A + 0$$

$$Em_A = Ec_A = \frac{1}{2}m(V_A)^2 \text{..................(3)}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) nos queda:

$$mgh_B - \frac{1}{2}mV_{A2} = W_r \text{..................................(4)}$$

Calculemos W_r.

El trabajo realizado por la fuerza de roce al recorrer la longitud x viene dado por la expresión:

$$W_r = F_r.x.\cos 180^o$$

$$W_r = \mu_k.N.x.\cos 180^o$$

$$W_r = -\mu_k.P_y.x$$

$$W_r = -\mu_k.P\cos 37^o.x$$

$$W_r = -\mu_k.mg\cos 37^o.x$$

$$W_r = -0{,}2.\ m.9{,}8\ m/s^2.\cos 37^o$$

$$W_r = -1{,}57.m.x \text{ Joules} \text{........................(5)}$$

Tratemos de expresar h_B en función de x. Para ello recurrimos a la figura 4.20(a) y aplicamos sen 37°.

$$\operatorname{sen} 37^o = \frac{h_B}{x} \quad \text{de donde}$$

$$h_B = x \operatorname{sen} 37^o \text{.....................................(6)}$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4) se tiene que:

$$mgx\operatorname{sen} 37^o - \frac{1}{2}m(V_A)^2 = -1{,}57x$$

Simplificando m y eliminando denominadores nos queda:

$$2gx\operatorname{sen} 37^o - (V_A)^2 = -3{,}14.x$$

Agrupando los términos que contienen x se tiene que:

$$2gx\operatorname{sen} 37^o + 3.14x = (V_A)^2$$

$$x(2g\operatorname{sen} 37^o + 3{,}14) = (V_A)^2$$

Despejando x nos queda que:

$$x = \frac{(20\ m/s)^2}{2 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \text{ sen } 37^\circ + 3{,}14}$$

$$\boxed{x = 26{,}78\ m}$$

Problema 4

Un automóvil de masa 2000 Kg realiza un desplazamiento de 200 m para variar su rapidez de 14 m/s a 22 m/s. Calcular: a) el trabajo que realiza la fuerza no equilibrada que dio origen al cambio de rapidez; b) el módulo de la fuerza aplicada.

Datos

$m = 2000$ Kg
$x = 200$ m
$V_o = 14$ m/s
$V_f = 22$ m/s
$Ec = ?$
$F = ?$

Solución

a) Cálculo del trabajo

La energía cinética inicial viene dada por la ecuación:

$$Ec_o = \frac{1}{2}\ m\ Vo^2$$

La energía cinética final viene dada por la ecuación:

$$Ec_f = \frac{1}{2}\ m\ Vf^2$$

Para calcular el trabajo que realiza la fuerza no equilibrada debemos calcular la variación de la energía cinética (Ec), de acuerdo con el teorema trabajo energía, es decir:

$$Ec = Ec_f - Ec_o$$

$$Ec = \frac{1}{2}\ m\ Vf^2 - \frac{1}{2}\ m\ Vo^2$$

Sacando factor común 1/2 m nos queda:

$$Ec = \frac{1}{2}\ m\ (\ Vf^2 - Vo^2)$$

$$Ec = \frac{1}{2}\ 2000\ Kg\ [(22\ m/s)^2 - (14\ m/s)^2]$$

$Ec = 288000$ Joules

b) Cálculo del módulo de la fuerza.

Como $Ec = W$ entonces se tendrá que:

$W = F.x$

Despejando F tenemos que:

$$F = \frac{W}{x}$$

$$F = \frac{288000\ Joules}{200\ m}$$

$$\boxed{F = 1440\ N}$$

Problema 5

Un avión se desplaza horizontalmente a una altura de 800 m con una velocidad de 60 m/s en el momento en que deja caer un objeto de masa 12 Kg. Calcular la velocidad que tendrá el cuerpo cuando haya descendido la cuarta parte de su altura inicial.

Solución

Observemos la figura 4.21 y llamemos (1) la posición inicial y (2) la posición final.

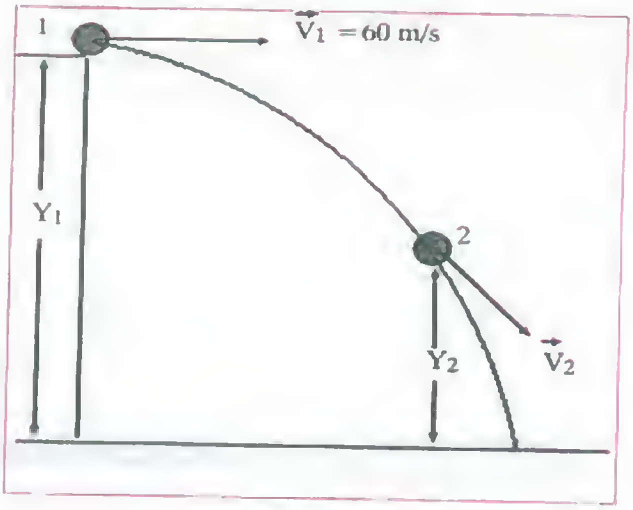


Figura 4.21

Como únicamente existen fuerzas conservativas podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica:

$$Em_1 = Em_2$$

$$\frac{1}{2} m(V_1)^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m(V_2)^2 + mgy_2$$

Eliminando denominadores y simplificando m nos queda:

$$(V_1)^2 + 2gy_1 = (V_2)^2 + 2gy_2$$

Despejemos V_2

$$(V_2)^2 = (V_1)^2 + 2gy_1 - 2gy_2$$

Sacando factor común 2g en los dos últimos términos del segundo miembro nos queda:

$$(V_2)^2 = (V_1)^2 + 2g(y_1 - y_2)$$

Sustituyendo valores se tiene que:

$$(V_2)^2 = (60\ m/s)^2 + 2.9{,}8 m/s^2(800m - 200m)$$

$$(V_2)^2 = 15360\ m^2/s^2$$

Extrayendo raíz cuadrada nos queda:

$$V_2 = 123{,}9\ m/s$$

Problema 6

Un objeto de masa m se desliza a lo largo de la pista mostrada en la figura 4.22. Si no se considera el roce y se encontraba en reposo en el punto A, calcular: a) la rapidez del objeto en el punto B; b) la rapidez en el punto C; c) si la masa fuese de 0,3 Kg, ¿Cuál es la energía mecánica en B?.

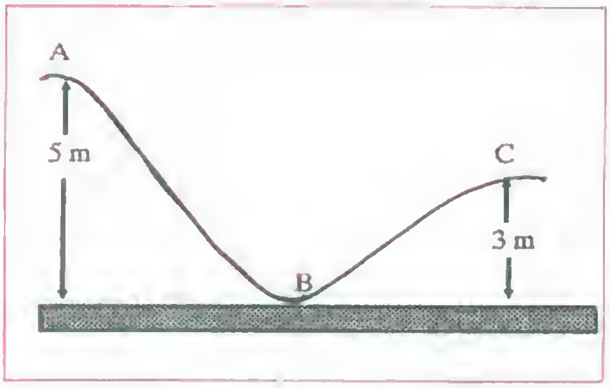


Figura 4.22

Solución

a) Para calcular la rapidez en B usamos el principio de conservación de la energía mecánica, escribiéndose que:

$$Em_A = Em_B$$

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B \quad \text{..................(I)}$$

En la posición A el objeto está en reposo por lo que $V_A = 0$ y como consecuencia $Ec_A = 0$

En la posición B, el objeto tiene $h_B = 0$

Con las consideraciones hechas la igualdad (I) anterior se transforma en:

$$Ep_A = Ec_B \quad \text{..................................(II)}$$

Sustituyendo por sus ecuaciones correspondientes tenemos:

$$mgh_A = \frac{1}{2} m\,(V_B)^2$$

Simplificando m y despejando V_B se tiene que:

$$(V_B)^2 = 2\,g\,h_A$$

Sustituyendo por $g = 9{,}8\ m/s^2$ y $h_A = 5$ m nos queda:

$$(V_B)^2 = 2.9{,}8\ m/s^2.5\ m$$

$$(V_B)^2 = 98\ m^2/s^2$$

Extrayendo raíz cuadrada se tiene que:

$$\boxed{V_B = 9{,}89\ m/s}$$

b) Cálculo de la rapidez en el punto C

Usemos nuevamente el principio de conservación de la energía mecánica para los puntos B y C.

$$Em_B = Em_C$$

$$Ec_B + Ep_B = Ec_C + Ep_C$$

Como $h_B = 0$ se tendrá que $Ep_B = 0$ y la ecuación se convierte en:

$$Ec_B = Ec_C + Ep_C$$

Sustituyendo por sus correspondientes ecuaciones se tiene que:

$$\frac{1}{2}\,m(V_B)^2 = \frac{1}{2}m(V_C)^2 + m\,g\,h_C$$

Dividiendo ambos miembros por m nos queda:

$$\frac{1}{2}\,(V_B)^2 = \frac{1}{2}\,(V_C)^2 + g\,h_C$$

$$\frac{1}{2}\,(V_B)^2 - g\,h_C = \frac{1}{2}(V_C)^2$$

Despejando $(V_C)^2$ nos queda:

$$2[\frac{1}{2}\,(V_B)^2 - g\,h_C] = (V_C)^2$$

$$(V_C)^2 = (V_B)^2 - 2\,g\,h_C$$

$$V_C = \sqrt{100\ m^2/s^2 - 2.9{,}8\ m/s^2.3\ m}$$

Efectuando operaciones y extrayendo raíz se tiene que:

$$V_C = 6{,}4\ m/s$$

c) La energía mecánica en B vendría dada por:

$$Em_B = Ec_B + Ep_B$$

Pero $Ep_B = 0$ por que $h_B = 0$

Luego:

$$Em_B = Ec_B = \frac{1}{2}\ m(V_B)^2$$

$$Em_B = \frac{1}{2}\ .\ 0{,}3\ Kg.(9{,}89\ m/s)^2$$

$$\boxed{Em_B = 14{,}67\ Joules}$$

Problema 7

Un bloque de masa 5 Kg se desliza horizontalmente con una velocidad de 15 m/s en el momento en que choca con un resorte, comprimiéndolo y variando su rapidez a 10 m/s. Si la constante de elasticidad del resorte es 500 N/m, ¿Cuánto se ha comprimido éste?

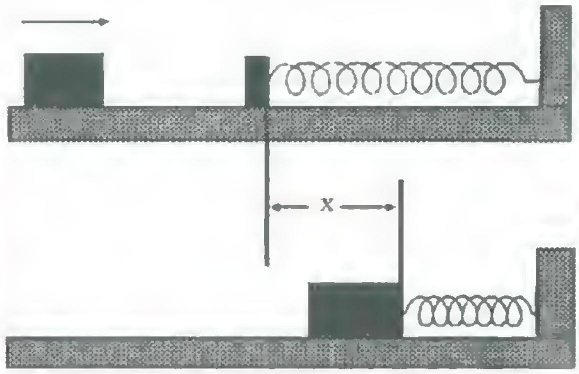


Figura 4.23

Datos

m = 5 Kg
V_o = 15 m/s
V_f = 10 m/s
K = 500 N/m
x = ?

Solución

Cuando el bloque choca con el resorte disminuye su velocidad, habiendo una pérdida de energía.

De acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica, la energía cinética inicial del bloque (Ec_o) se transforma en una nueva energía cinética final (Ec_f), más la energía potencial elástica del resorte al comprimirse (Ep_e), pudiendo escribirse:

$$Ec_o = Ec_f + Ep_e$$

Despejando Ep_e nos queda que:

$$Ep_e = Ec_o - Ec_f$$

$$Ep_e = \frac{1}{2}\ m\ Vo^2 - \frac{1}{2}\ m\ Vf^2$$

Sacando 1/2 m factor común nos queda:

$$Ep_e = \frac{1}{2}\ m\ (\ Vo^2 - Vf^2)$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$Ep_e = \frac{1}{2}\ 5\ Kg.[(15m/s)^2 - (10\ m/s)^2]$$

$Ep_e = 312{,}5$ Joules

De la ecuación de energía potencial elástica tenemos que:

$$Ep_e = \frac{1}{2} K x^2$$

Despejando x nos queda :

$$x = \sqrt{\frac{2\,Ep_e}{K}} = \sqrt{\frac{2.312{,}5\ J}{500\ N/m}}$$

$$\boxed{x = 1{,}118\ m}$$

Problema 8

En la figura 4.24 se tiene un móvil de 800 g, moviéndose por una pista horizontal con una rapidez de 60 m/s para entrar a una pista circular. En el punto A la rapidez es de 20 m/s. Calcular el radio de la pista y la rapidez en B.

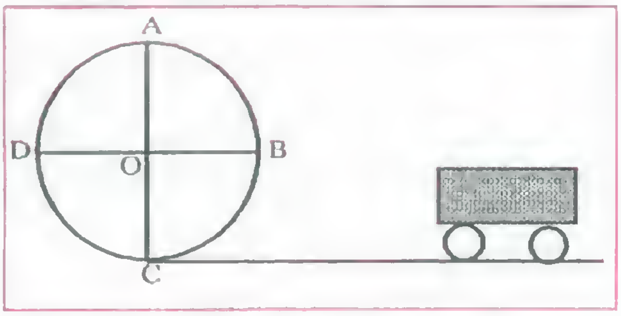


Figura 4.24

Datos

$m = 800\ g = 0{,}8\ Kg$
$h_C = 0$
$V_C = 60\ m/s$
$g = 9{,}8\ m/s^2$
$V_A = 20\ m/s$

Solución

Por el principio de conservación de la energía mecánica podemos escribir que:

$$Em_C = Ec_C + Ep_C$$

$$Em_C = \frac{1}{2}\ m\,(V_C)^2 + m\,g\,h_C$$

Como $h_C = 0$, nos queda:

$$Em_C = \frac{1}{2}\ m\,(V_C)^2$$

$$Em_C = \frac{1}{2}\ .0{,}8\ Kg.\ (60\ m/s)^2$$

$$\boxed{Em_C = 1440\ Joules}$$

Calculemos h_A.

Apliquemos el principio de conservación de la energía mecánica en el punto A.

$$Em_A = Ec_A + Ep_A$$

Para calcular h_A despejemos Ep_A

$$Ep_A = Em_A - Ec_A$$

$$m\,g\,h_A = Em_A - \frac{1}{2}\ m(V_A)^2$$

$$2\,m\,g\,h_A = 2Em_A - m\,(V_A)^2$$

Despejando h_A se tiene que:

$$h_A = \frac{2Em_A - m(V_A)^2}{2\,m\,g}$$

Sustituyendo por sus valores se tiene:

$$h_A = \frac{2.1440\ J - 0{,}8\ (20\ m/s)^2}{2.0{,}8\ Kg.9{,}8\ m/s^2}$$

$$\boxed{h_A = 163{,}26\ m.}$$

Para calcular la velocidad en B escribimos:

$$Em_B = Ec_B + Ep_B$$

Despejemos Ec_B

$$Ec_B = Em_B - Ep_B$$

$$\frac{1}{2}\ m\,(V_B)^2 = Em_B - m\,g\,h_B$$

$$m\,(V_B)^2 = 2\,(Em_B - m\,g\,h_B)$$

$$(V_B)^2 = \frac{2(Em_B - m\,g\,h_B)}{m}$$

$$(V_B)^2 = \frac{2(1440\ J - 0{,}8\ Kg.9{,}8\ m/s^2)}{0{,}8\ Kg}$$

Efectuando operaciones y extrayendo raíz cuadrada obtenemos:

$$\boxed{V_B = 44{,}72\ m/s}$$

Problemas propuestos

Resuelva cada uno de los siguientes problemas y usa como valor de gravedad $g = 9{,}8\ m/s^2$.

1. Demuestra, usando consideraciones energéticas, que la altura Y alcanzada cuando se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de V_o viene dada por la expresión:

$$Y = \frac{Vo^2}{2g}$$

2. Se tiene un cuerpo de masa m, que se desliza sin roce por el plano de la figura 4.25. Si el cuerpo parte del punto A, calcular la velocidad que tendrá al llegar al punto B.

R: 8,85 m/s

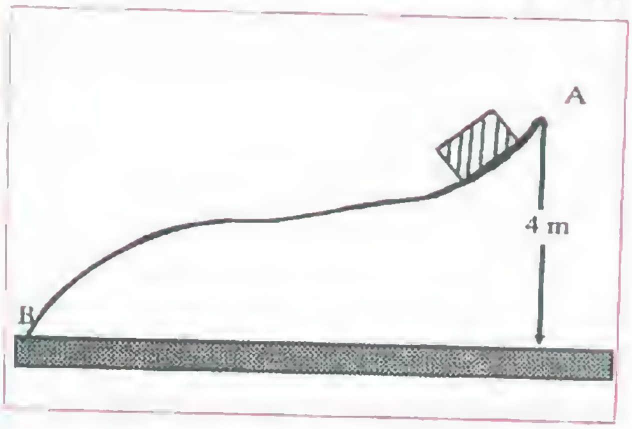


Figura 4.25

3. Una esferita de masa "m" está rodando a través de una vía desde una altura h, tal como lo muestra la figura 4.26. El radio de la pista circular es de 0,5 m. ¿Desde qué altura se debe dejar caer la esferita para que la rapidez en el punto P sea de 10,95 m/s?. ¿Cuál es la rapidez de la esferita en el punto Q?.

R: 6,1 m y 10 m/s

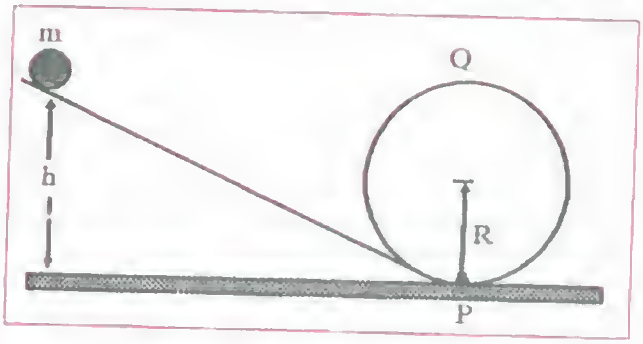


Figura 4.26

4. Se tiene un bloque de 10 Newton que se desliza sobre un plano horizontal sin fricción, con una rapidez de 2 m/s. El bloque choca de frente con un resorte de constante de clasticidad 25 N/m, comprimiéndolo hasta detenerse. ¿Qué longitud se comprime el resorte?. ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando el resorte se haya comprimido 0,2 m?. Use $g = 9{,}8\ m/s^2$.

R: 0,4 m y 1,75 m/s

5. Un bloque se encuentra en reposo en un punto A situado a 5 m del suelo. Este bloque cae verticalmente pasando por un punto B situado a 3 m del suelo. Calcular: a) la velocidad del bloque al pasar por el punto B. b) la altura desde el suelo, de un punto C ubicado más abajo, en donde la velocidad es 8,2 m/s.

R: a) 6,26 m/s b) 1,57 m.

6. En la figura 4.27 se muestra una partícula que se desplaza a lo largo de un camino ABCD desde h = 3 m. Si parte del reposo en el punto A, calcular la velocidad de la partícula en los puntos B y C.

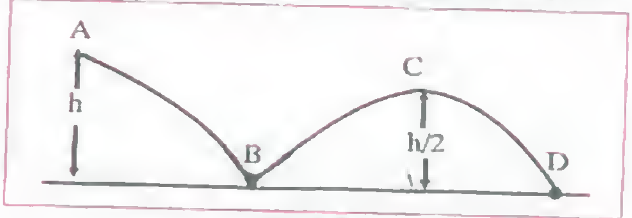


Figura 4.27

R: 7,67 m/s; 6,64 m/s.

7. Se tiene un cuerpo de masa 1,4 Kg, el cual está ubicado en un punto A, a una altura vertical de 42 m del suelo. Si el cuerpo se suelta y pasa por un punto B situado más abajo con una rapidez de 12 m/s, calcular: a) la energía potencial en B; b) ¿a qué altura está el punto B respecto al suelo?; c) ¿cuál es la rapidez del cuerpo en el instante de tocar el suelo?.

R: a) 475,4 Joules b) 34,65 m c) 28,69 m/s

8. Un cuerpo de masa 0,2 Kg se lanza verticalmente hacia arriba alcanzando una altura de 45 m, para luego descender. Calcular: a) la energía mecánica total en el punto más alto de la trayectoria; b) ¿cuál es la energía cinética del cuerpo cuando haya descendido 15 m?.

R: a) 88,2 Joules b) 29,4 Joules.

9. Desde una torre de 40 m de altura se dispara un proyectil de 1 Kg, formando con la horizontal un ángulo de 37°, con una velocidad de 120 m/s. Calcular por consideraciones energéticas la velocidad del proyectil en el momento de llegar al suelo.

R: 123 m/s.

10. Un bloque de 35,6 N de peso avanza a 1,22 m/s sobre una mesa horizontal sin rozamiento. En su camino se encuentra un resorte de constante de elasticidad 3,63 N/m, calcular la máxima compresión del resorte.

R: 1,22 m

11. Un cuerpo de 15 Kg está en reposo a 10 m de altura. Si se le deja caer libremente, calcular: a) la energía potencial cuando el cuerpo tenga una velocidad de 10,8 m/s b) la energía cinética cuando haya descendido 8 m.

R: a) 1389 J b) 1176 J

12. Un bloque de 5 Kg se mueve sobre un plano horizontal con una velocidad de 10 m/s en el momento en que choca contra un muelle de constante de elasticidad 25 N/m . Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal es 0,2 calcular la longitud que se comprime el resorte, sabiendo que la masa del muelle es despreciable.

R: 4 m

13. Se lanza una pelota de 0,5 Kg hacia arriba con una velocidad inicial de 16 m/s. Suponiendo que su energía potencial inicial es cero, calcular: a) las energías cinética y mecánica en su posición inicial. b) las energías potencial, cinética y mecánica cuando esté a 5 m de altura. c) la altura máxima utilizando la ley de conservación de la energía.

R: a) 64 J, 64 J b) 39,5 J, 24,5 J y 64 J c) 13,1 m.

14. En la figura 4.28 se muestra en el punto A de la cima de una montaña rusa un coche que con sus ocupantes tiene una masa total de 1000 Kg. Si en ese momento tiene una velocidad de 5 m/s, calcular la energía cinética del coche cuando esté en la segunda cima en el punto B.

R: 208500 J

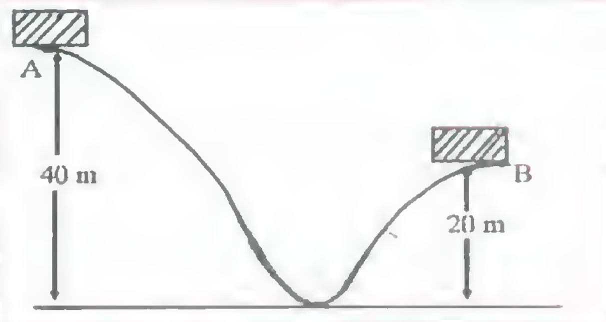


Figura 4.28

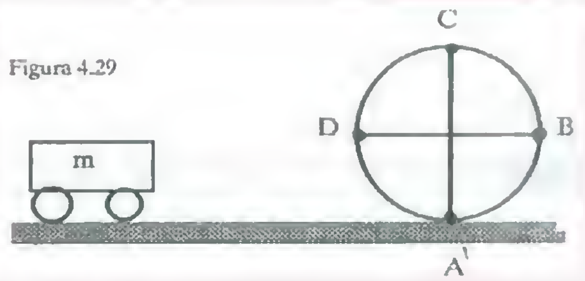
15. Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 1,2 Kg con una velocidad inicial de 80 m/s. Calcular: a) La energía mecánica inicial b) La energía cinética cuando esté a 120 m de altura c) La energía potencial cuando su velocidad sea 12 m/s d) La altura a la cual se encuentra del suelo cuando su velocidad sea 8 m/s.

R: a) 3840 J b) 2428,8 J

c) 3756,6 J c) 323,27 m.

16. Se tiene un carrito de masa 1,5 Kg, el cual se mueve con una velocidad de 50 m/s para entrar en una pista circular (figura 4.29). En el punto C tiene una velocidad de 20 m/s. Calcular: a) ¿a qué altura

Figura 4.29



se encuentra el punto C?; b) ¿cuál es la rapidez en el punto B?.

R: a) 107,14 m b) 38,08 m/s

17. Se lanza un proyectil de masa 1,5 Kg con una velocidad inicial de 42 m/s, formando con la horizontal un ángulo de 34°. Calcular: a) la energía mecánica a los 3 s del lanzamiento; b) la energía potencial cuando haya alcanzado la altura máxima.

R: a) 1323,16 J b) 413,835 J

18. Un bloque de masa 3,5 Kg se desliza sobre un plano horizontal con una velocidad de 1,22 m/s. En su camino choca con un resorte. ¿Cuánto se ha de comprimir éste para que el bloque se ponga en reposo?. La constante de elasticidad del resorte es 3,66 N/m.

R: 1,19 m

19. Un bloque de 4 Kg se desliza con una velocidad de 15 m/s por un plano horizontal y encuentra en su camino un resorte de constante de elasticidad 500 N/m. ¿Qué velocidad tendrá el bloque cuando el resorte se haya comprimido 0,8 m?.

R: 12,04 m/s

4.7 Choques elásticos

Si recordamos un poco algunos aspectos estudiados anteriormente, vimos que los choques o colisiones podían ser: **elásticos**, **inelásticos** y **perfectamente elásticos**.

En los **choques inelásticos** se conservaba la cantidad de movimiento, no así la energía cinética, la cual puede aumentar o disminuir.

En los **choques perfectamente inelásticos**, además de conservarse la cantidad de movimiento, las partículas o cuerpos quedan unidos como resultado de la colisión y continúan moviéndose con velocidad común.

Aquí nos dedicaremos exclusivamente al estudio de los **choques elásticos**, que son aquellos en los cuales se conservan la cantidad de movimiento y la energía cinética.

4.8 Choques elasticos unidimensionales.

Consideremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 los cuales se mueven inicialmente con velocidades v_1 y v_2 respectivamente, tal como se muestra en la figura 4.30. Después del choque se mueven con velocidades v'_1 y v'_2.

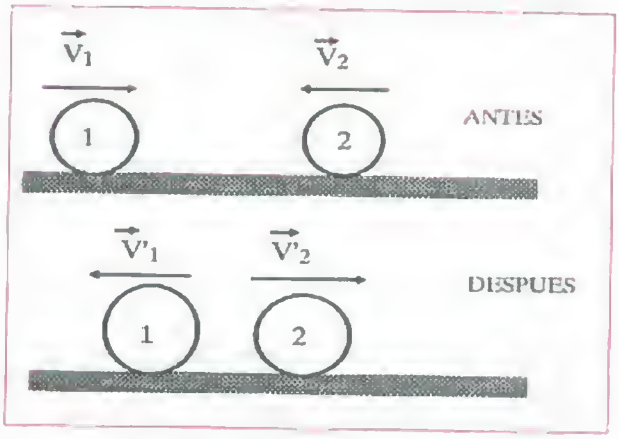


Figura 4.30

Como el movimiento tiene lugar en una dirección única, estos valores se considerarán positivos o negativos según el sentido del mismo. **La velocidad es positiva** si se mueve hacia la derecha y **negativa si se mueve hacia la izquierda.**

Nuestro propósito consiste en averiguar las velocidades v'_1 y v'_2 de los cuerpos después del choque.

De acuerdo con la definición de choques elásticos, las dos condiciones que el sistema de las dos masas debe satisfacer son: **la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía cinética**, pudiéndose escribir que:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V'_1 + m_2V'_2 \quad ....(1)$$

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V'^2_1 + \frac{1}{2}m_2V'^2_2 ...(2)$$

Si en la ecuación (2) simplificamos por 1/2 y agrupamos los valores de cada cuerpo, de tal manera que aparezcan en el lado izquierdo los términos que sólo contienen a m_1 y en el lado derecho los que contienen a m_2 puede escribirse que:

$$m_1(V_1)^2 - m_1(V'_1)^2 = m_2(V'_2)^2 - m_2(V_2)^2$$

Sacando factor común m_1 en el primer miembro y m_2 en el segundo miembro se tiene que:

$$m_1 (V1^2 - V'1^2) = m_2 (V'2^2 - V2^2)$$

La diferencia de cuadrados en cada paréntesis se puede expresar como el producto de una suma por su diferencia, quedándonos que:

$$m_1(v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2) \ldots (3)$$

Tomemos ahora la ecuación (1) y separemos los términos que contienen a m_1 y m_2, quedándonos que:

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Dividiendo miembro a miembro (3) entre (4) nos queda que:

$$\frac{m_1(v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1)}{m_1(v_1 - v'_1)} = \frac{m_2(v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2)}{m_2(v'_2 - v_2)}$$

Simplificando se tiene que:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2$$

de donde

$$v'_2 = v'_1 + v_1 - v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Esta ecuación, en combinación con la ecuación para la conservación de la cantidad de movimiento se puede utilizar para la resolución de problemas que tratan con choques perfectamente elásticos.

Sustituyendo la expresión (5) en la expresión (1) se tendrá que:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2(v'_1 + v_1 - v_2)$$

Aplicando propiedad distributiva y agrupando los términos que contienen a v'_1 nos queda:

$$m_1v_1 + m_2v_2 - m_2v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_1$$

$$(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'_1$$

$$V'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{V'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}.v_2 \quad \ldots (6)}$$

De la misma forma se tendrá para v'_2 que:

$$\boxed{V'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.v_1 \quad \ldots\ldots (7)}$$

Estas ecuaciones (6) y (7) nos permiten calcular las velocidades de los cuerpos v'_1 y v'_2 después del choque, en función de las masas y de las velocidades antes del choque.

Observaciones

- Es importante agregar que los signos apropiados para v_1 y v_2 deben ser incluidos en las ecuaciones, ya que las velocidades son vectores. Si se desplazan hacia la izquierda son negativos y si lo hacen hacia la derecha son positivos.

- Nótese que para obtener la ecuación (7) basta intercambiar los subíndices de la ecuación (6).

Casos particulares

Observemos detenidamente las ecuaciones (6) y (7) bajo las siguientes condiciones:

1. Si $m_1 = m_2$ se ve de inmediato que:

$$v'_1 = v_2 \text{ y } v'_2 = v_1$$

En este caso las partículas intercambian sus velocidades.

2. Si m_2 está inicialmente en reposo $v_2 = 0$ y las ecuaciones (6) y (7) se transforman en:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.v_1$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.v_1$$

3. Si m_2 es muy grande comparada con m_1 y $v_2 = 0$ se tendrá que:

$$v'_1 = -v_1 \quad \text{y}$$

v'_2 es mucho menor que v_1

$$v'_2 = 0$$

Esto último se traduce diciendo: **cuando una partícula muy ligera choca contra una muy pesada inicialmente en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad, en cambio la partícula pesada permanece casi en reposo.**

4. Si m_1 es muy grande comparada con m_2 y $v_2 = 0$ se tendrá que v'_1 es aproximadamente igual a v_1 y v'_2 es aproximadamente igual al doble de v_1

Esto se traduce diciendo: **cuando una partícula muy pesada choca con una ligera inicialmente en reposo, la partícula pesada no altera su velocidad después del choque, mientras que la partícula**

ligera rebota con una velocidad que es aproximadamente el doble de la velocidad inicial de la partícula pesada.

Problemas Resueltos

Una esfera de masa $m_1 = 2$ Kg se desplaza hacia la derecha con una velocidad de 4 m/s y choca con otra esfera de masa $m_2 = 5$ Kg que se desplaza hacia la izquierda con una velocidad de 3 m/s. Calcular las velocidades después del choque sabiendo que éste es elástico.

Datos

$m_1 = 2$ Kg
$m_2 = 5$ Kg
$v_1 = 4$ m/s
$v_2 = -3$m/s

Solución

Para calcular las velocidades después del choque usamos las expresiones correspondientes a cada caso para choques elásticos.

Para la primera esfera se tiene:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} .v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} .v_2$$

Sustituyendo valores se tiene que:

$$v'_1 = \frac{3}{7} .4 \text{ m/s} + \frac{10}{7} .(-3 \text{ m/s})$$

$$v'_1 = \frac{12}{7} \text{ m/s} - \frac{30}{7} \text{ m/s}$$

$$\boxed{\mathbf{v'_1 = -6 \text{ m/s}}}$$

Para la segunda esfera se tendrá:

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} .v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} .v_1$$

$$v'_2 = \frac{3}{7} .(-3 \text{ m/s}) + \frac{4}{7} \text{ m/s. } 4 \text{ m/s}$$

$$v'_2 = -\frac{9}{7} \text{ m/s} + \frac{16}{7} \text{ m/s}$$

$$\boxed{\mathbf{v'_2 = 1 \text{ m/s}}}$$

Un esfera de masa 6 Kg se mueve hacia la derecha con una velocidad de 10 m/s y choca con una esfera de 4 Kg que se encuentra en reposo. Calcular sus velocidades después del choque, si éste es perfectamente elástico.

Datos

$m_1 = 6$ Kg
$m_2 = 4$ Kg
$v_1 = 10$ m/s
$v_2 = 0$ m/s

Solución

La velocidad v'_1 después del choque para la masa m_1 viene dada por la ecuación:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} .v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} .v_2$$

Como la masa m_2 está en reposo se tendrá que $v_2 = 0$ quedándonos que:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} .v_1$$

Sustituyendo valores se tiene que:

$$v'_1 = \frac{6\text{Kg} - 4\text{Kg}}{10\text{Kg}} .10 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\mathbf{v'_1 = 2 \text{ m/s}}}$$

Si hacemos lo mismo con la ecuación para v'_2 se tendrá que:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} . v_1$$

$$v'_2 = \frac{2.6Kg}{10Kg} . 10 \text{ m/s}$$

$$\boxed{v'_2 = 12 \text{ m/s}}$$

Observaciones

Otra forma de resolver estos problemas consiste en plantear las dos ecuaciones:

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$$

$$m_1.v_1 + m_2.v_2 = m_1.v'_1 + m_2.v'_2$$

Aquí nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que debemos resolver usando cualquier método.

Si usamos el problema (1) y sustituimos sus valores en las ecuaciones planteadas se tiene que:

$$4 + v'_1 = -3 + v'_2$$

$$8 - 15 = 2v'_1 + 5v'_2$$

Agrupando términos nos queda:

$$v'_1 - v'_2 = -7$$

$$2v'_1 + 5v'_2 = -7$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por cualquier método se tendrá que:

$v'_1 = -6$ m/s y $v'_2 = 1$ m/s

Coeficiente de restitución

Recordemos la expresión dada por:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2$$

Esta expresión puede ser escrita así:

$$v'_2 - v'_1 = v_1 - v_2$$

Se llama **coeficiente de restitución** a la relación definida como

$$e = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}$$

donde "e" representa el **coeficiente de restitución**. Este coeficiente mide el grado de **elasticidad** del choque.

Veamos lo que puede ocurrir según varía el valor de "e".

* Si $e = 0$ se deduce que $v'_2 = v'_1$

De aquí se deduce que los cuerpos después del choque tendrán la misma velocidad.El choque es **perfectamente inelástico**

* Si $e = 1$ se deduce que:

$$v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2$$

En este caso el choque es **perfectamente elástico** y se conserva la energía cinética.

* Si e está comprendido entre 0 y 1 entonces el choque es **inelástico.**

Problemas propuestos

1. Un cuerpo de masa 3 Kg que se desplaza hacia la derecha a 0,8 m/s choca elásticamente con otro cuerpo de masa 2 Kg que está en reposo. ¿Con qué velocidad se desplazan después del choque?.

R: 0,16 m/s y 0,96 m/s

2. Un cuerpo de masa 5 Kg se desplaza hacia la derecha con una velocidad de 3 m/s, el cual choca elásticamente con otro cuerpo de masa 3 Kg moviéndose también hacia la derecha con velocidad de 2 m/s. Calcular la velocidad de los cuerpos después del choque.

R: 2,25 m/s y 3,25 m/s

3. Un cuerpo de masa 5 Kg se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 3 m/s, y choca con otro cuerpo de 1 Kg que se mueve hacia la derecha con velocidad de 4 m/s. Si chocan elásticamente, calcular las velocidades de cada cuerpo después de la colisión.

R: -0,66 m/s y -7,67 m/s

4. Dos cuerpos de masas $m_1 = 0,55$ Kg y $m_2 = 0,45$ Kg se desplazan en la misma dirección, con velocidades de 1,8 m/s y 1,2 m/s respectivamente. a) ¿Qué velocidad tendrán después de un choque elástico frontal?. b) Si se movieran en sentidos

opuestos con las velocidades indicadas ¿cuáles serían las velocidades después del choque?.

R: a) 1,26 m/s; 1,86 m/s b) 0,9 m/s; 2,10 m/s

5. Un bloque de 10 Kg se mueve con una velocidad de 5 m/s y choca con otro bloque de 3 Kg que se encuentra en reposo. Calcular las velocidades de los bloques después del choque si éste es elástico.

R: 7,69 m/s; 2,69 m/s

6. Dos bloques de masas $m_1 = 15$ g y $m_2 = 5$ g se mueven en la misma dirección pero en sentidos opuestos, con velocidades de 10 m/s y 5 m/s respectivamente. Calcular sus velocidades después del choque elástico.

R: 2,5 m/s y 17,5 m/s

7. Un cuerpo de masa m_1 choca con otro de masa m_2 en reposo. ¿Cuál debe ser la relación entre ambas masas para que, suponiendo el choque frontal y elástico, la velocidad del primero se reduzca 1,5 veces?.

R: $m_1/m_2 = 5$

8. Una esfera de 2 Kg se desplaza a una velocidad de 1,5 m/s y choca frontalmente con otra de 1 Kg que se desplaza en sentido opuesto a 0,5 m/s. Suponiendo el choque elástico, calcular las velocidades de las esferas después del choque.

R: 0,17 m/s y 2,17 m/s

9. Un cuerpo de masa $m_1 = 2$ Kg que se mueve con una velocidad de 3 m/s, da alcance y choca frontalmente a un cuerpo de masa $m_2 = 3$ Kg que se desplaza en la misma dirección y sentido que el anterior con la velocidad de 1 m/s. Calcular las velocidades de ambos cuerpos después del choque suponiendo que éste es elástico.

R: 0,6 m/s y 2,6 m/s

10. Un bloque de 0,01 Kg se desplaza a una velocidad de 0,2 m/s sobre una superficie horizontal y choca frontalmente con otro bloque de masa 0,03 Kg que se desplaza en sentido opuesto con una velocidad de 0,1 m/s. Sabiendo que el choque es perfectamente elástico, calcular la velocidad de cada bloque después del choque.

R: 0,05 m/s y -0,15 m/s

11. Se tiene un cuerpo de masa $m_1 = 0,2$ Kg el cual se mueve horizontalmente con una velocidad de 0,12 m/s. En su camino realiza un choque elástico con otro cuerpo de masa m_2 que se encuentra en reposo. Después del choque la velocidad del primer cuerpo es 0,04 m/s y en el mismo sentido que su velocidad inicial. Calcular: a) la masa del cuerpo b) la velocidad después del choque.

R: a)0,1 Kg b) 0,16 m/s

12. Una masa $m_1 = 2$Kg que se mueve en la dirección positiva de las x con una velocidad de 6 m/s choca elásticamente de frente con una masa m_2. Después del choque la masa de 2 Kg queda en reposo y la masa m_2 se mueve con una velocidad de 12 m/s. Calcular el valor de m_2 y su velocidad antes del choque.

R: 2/3 Kg y -6 m/s

Autoevaluación

Primera parte. Selección

A continuación se te dan una serie de proposiciones con cuatro alternativas cada una. Selecciona la letra de la alternativa correcta.

1. En física, el trabajo mecánico es lo mismo que:
a) Esfuerzo
b) Desplazamiento
c) Fuerza
d) Variación de energía

2. En física decimos que la potencia mecánica es:
a) Capacidad de realizar trabajo mecánico.
b) Trabajo mecánico realizado
c) Capacidad de realizar trabajo en función del tiempo.
d) Todas la anteriores

3. Cuando decimos que una máquina A tiene más potencia que una máquina B, queremos decir que:
a) La máquina A puede realizar más trabajo que la B.
b) La máquina A tarda más tiempo que la B en realizar el mismo trabajo.
c) En el mismo tiempo la máquina B efectuará menos trabajo que la A.
d) La máquina A es más lenta que la B.

4. Decimos que una fuerza es conservativa cuando:

a) Conserva la energía cinética sobre el que actúa.
b) Su trabajo sólo depende de las posiciones inicial y final.
c) Conserva la cantidad de movimiento del cuerpo sobre el que actúa.
d) Su trabajo es independiente de la distancia entre las posiciones inicial y final.

5. Un hombre sostiene en sus manos a una misma altura dos objetos: uno de masa m y otro de masa 2m. La energía potencial del objeto de masa 2m respecto al objeto de masa m será:
a) menor
b) Mayor
c) Igual
d) Incomparable.

6. En un lanzamiento vertical hacia arriba afirmamos:
a) La energía cinética inicial es el doble de la energía potencial gravitacional a la mitad de la altura.
b) La energía mecánica es mayor que la energía cinética inicial.
c) La energía cinética inicial nunca es igual a la energía potencial.
d) La energía potencial nunca es igual a la energía mecánica.

7. La energía mecánica de un cuerpo se conserva siempre que:
a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo varíen con la distancia.
b) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo sean disipativas.
c) El trabajo de las fuerzas depende únicamente de las posiciones inicial y final.
d) El trabajo de las fuerzas entre dos puntos cualesquiera sea constante.

8. Cuando un cuerpo se mueve en un circulo a velocidad constante, la fuerza que produce su aceleración realiza trabajo:
a) Máximo.
b) Nulo.
c) Mínimo.
d) Negativo.

9. En un choque elástico:
a) Se conserva únicamente la cantidad de movimiento.
b) Se conserva únicamente la energía cinética.
c) Se conservan simultáneamente las dos anteriores.
d) El coeficiente de restitución es cero.

10. Dos cuerpos A y B tienen de masas "m" y "2m" respectivamente e idéntica cantidad de movimiento, entonces:
a) A posee mayor energía cinética.
b) B posee mayor energía cinética.
c) Posee idéntica energía cinética.
d) No se pueden comparar las energías cinéticas.

Segunda parte. Verdadero-Falso

De las siguientes afirmaciones, señala cuáles son falsas y cuáles son verdaderas. En caso de ser falsa, explica las razones.

1. Cuando un cuerpo se desplaza sobre una superficie horizontal, la fuerza normal ejercida sobre ella realiza trabajo nulo.

2. Sólo las fuerzas conservativas realizan trabajo.

3. Si únicamente actúan fuerzas conservativas, la energía cinética de una partícula en movimiento no varía.

4. La energía mecánica de una partícula se conserva siempre.

5. Si el choque entre dos cuerpos es completamente elástico se conserva únicamente la cantidad de movimiento.

6. El trabajo realizado por una fuerza conservativa aumenta la energía mecánica.

7. Podemos ver las manifestaciones de la energía durante el proceso de transformación.

8. Cuando un cuerpo con velocidad v choca contra un resorte y se detiene decimos que la energía cinética es cero.

9. Si un cuerpo en movimiento realiza una trayectoria cerrada hasta llegar al punto de partida, decimos que el trabajo realizado es nulo.

10. El Kwh y el Joule son ambos unidades de trabajo.

Tercera parte. Problemas

Resuelve cada uno de los siguientes problemas:

1. Un cuerpo de 1,2 Kg se lanza con una velocidad inicial de 25 m/s, formando un ángulo de 53° con la horizontal. Calcular: a) la energía mecánica inicial. b) la energía cinética y potencial al cabo de 1,2 s del lanzamiento. Usar $g = 9{,}8\ m/s^2$

R: a) 375 J b) 176,3 J; 198,8 J

2. Un esferita se desplaza en el punto A de la figura 4.44 a 6 m/s. Calcular: a) la velocidad de la esferita en le punto B. b) la altura a la cual se encuentra el punto C. Usar g = 9,8 m/s

R: a) 11,58 m/s b) 3,57 m

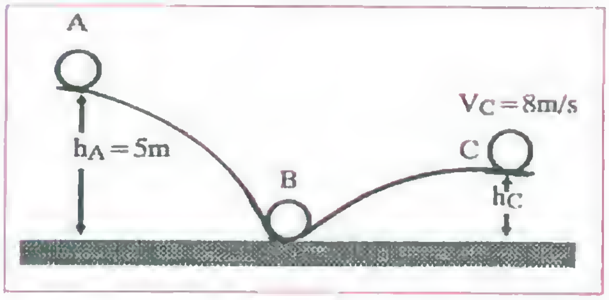


Figura 4.44

3. Los cuerpos A y B de la figura 4.45 tienen masas $m_A = 8$ Kg y $m_B = 24$ Kg. Ellos están unidos por una cuerda que pasa por una polea sin fricción. En las condiciones iniciales el sistema se encuentra en reposo y el cuerpo B a una altura de1,6 m por encima del suelo. Si se deja libre, usa la conservación de la energia, calcular: a) la velocidad con que B llega al suelo. b) la altura que alcanza el cuerpo A.

Sugerencia:

Parte a)

$$m_B\ g\ .\ h = \frac{1}{2} m_B V^2 + \frac{1}{2} m_A V^2 + m_A g.h$$

Parte b)

$$m_A g\ h_{max} = m_A\ g\ h_A + \frac{1}{2} m_A V_A^2$$

R: a) 4 m/s b) 2,4 m

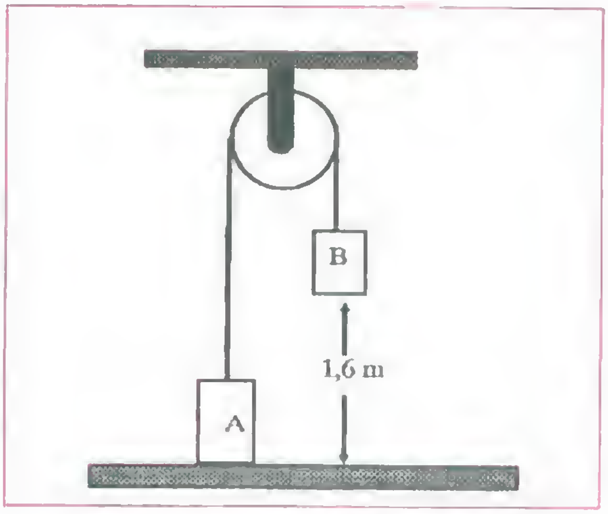


Figura 4.45

4. Un ascensor levanta 6 pasajeros hasta una altura de 30 m en 1 minuto. Si cada pasajero tiene una masa de 65 Kg y el ascensor una masa de 900 Kg, calcular la potencia desarrollada por el motor.

R: 6450 vatios

PRÁCTICAS DE LABORATORIO

- Medición de longitudes y tiempos.
- Estudio y análisis de gráficas. Relación entre parámetros.
- Movimiento rectilíneo uniforme. Movimiento rectilíneo uniformemente variado.
- Caída libre de los cuerpos.
- Movimiento en dos dimensiones.
- Movimiento armónico simple.
- Leyes de Newton.
- Fuerza de roce y coeficiente de roce.
- Ley de Hooke. Determinación del período de oscilación de un péndulo de resorte.
- Conservación de la energía mecánica.

LABORATORIO 1

MEDICIÓN DE LONGITUDES Y TIEMPOS.

Material requerido:

Hoja de papel
Hilo de coser
Tuerca
Cronómetro
Soporte universal
Regla graduada
Una hoja de papel milimetrado
Compás.

A. Pre-Laboratorio

En esta práctica aprenderemos como construir instrumentos que nos permitan medir longitudes y tiempos. Para ello haremos uso de materiales de fácil obtención.

Investiga y haz las anotaciones en tu cuaderno de laboratorio sobre cada uno de los siguientes aspectos:

a) ¿A qué se llama patrón de medida?.

b) ¿Qué características debe presentar un patrón de medida?

c) ¿Cómo se definieron antiguamente los patrones de longitud, masa y tiempo?

d) ¿Por qué estos patrones fueron cambiando a través de los años?

e)¿ Qué instrumentos de medición son usados en la actualidad para medir la longitud, la masa y el tiempo?

f) Haz un cuadro de unidades que contengan todas las unidades del Sistema Internacional (S.I.).

B. Laboratorio

Experiencia 1

Recorta una tira de papel de aproximadamente unos 50 cm de largo y 2 cm de ancho. Selecciona una unidad arbitraria, tal como el ancho de tu borrador o de tu sacapuntas. Marca una escala, utilizando esta unidad, a lo largo del borde de la tira de papel.

- ¿Qué nombre le darás a tu unidad seleccionada?
- Usa esa escala y mide la longitud y el ancho de tu libro. Anota esos valores. Estas medidas son ¿directas o indirectas?; ¿por qué?
- ¿Qué problemas presenta tu instrumento de medición?.
- Mide ahora el largo y el ancho del mismo libro con una regla graduada. ¿Son iguales estos valores a los obtenidos con tu cinta?. ¿Por qué?.
- Usa los valores obtenidos con la regla graduada y calcula el área de tu libro. ¿El resultado obtenido es una medida directa o indirecta?. ¿Por qué?.

Experiencia 2

Construye un péndulo con un trozo de hilo y un peso pequeño (tuerca). Ata el hilo en un soporte universal, y en el otro extremo atas la tuerca, de tal manera que haya entre la parte superior y la parte inferior unos 98 cm.

- Usa un cronómetro y mide el tiempo que tarda el péndulo en hacer diez oscilaciones. ¿Cuál es este valor?.
- Basándote en el valor anterior, calcula el de una oscilación y anota este valor. Si el intervalo de tiempo que deseas medir es inferior al valor anterior, procede a disminuir la longitud del hilo.
- Usa el tiempo de una oscilación como unidad de tiempo y mide los siguientes intervalos:

a) Tiempo que demora una canción.

b) Tiempo de duración de una clase.

c) Tiempo que tarda en llegar una hoja de papel al suelo.

Experiencia 3

Con una regla graduada mide el grosor de tu libro de texto. Divide dicho grosor entre el número de páginas y encontrarás el grosor de una página.

Experiencia 4

- Toma una hoja de papel milimetrado y traza una circunferencia de un centímetro de radio. Cuenta el número de cuadritos (mm) que aparecen dentro del círculo. Si la circunferencia corta un cuadro de milímetro, cuéntalo como medio.
- Usando el radio de la circunferencia y la fórmula del área de un círculo, calcula el área. Comp... este resultado con el anterior. ¿Son iguales?.

C. Post-Laboratorio

1. Un año luz es una unidad de longitud empleada para medir distancias de objetos lejanos a nosotros. Realiza una investigación para conocer el valor de un año luz, expresando este resultado en kilómetros y en notación científica.

2. Un alumno construyó un modelo y representó al sol a través de una pelota de 10 cm de radio, porque él era conocedor que el radio del sol es 10^9 m. Si el radio de la tierra es 10^7 m. ¿Qué radio debe tener la pelota que represente a la tierra en un modelo?.

3. Analiza las siguientes afirmaciones:

a) "Medir una magnitud es un proceso que consiste en encontrar la relación de su valor con otra que se ha seleccionado como unidad".

b) "Un patrón en física es una unidad física".

¿Cuál de ellas es falsa?. Explica por qué?. ¿Cómo la redactarías para que fuese verdadera?.

4. Explica cuál de las medidas siguientes es directa y cuál es indirecta

a) La medida de la superficie del suelo de una habitación contando el número de baldosas.

b) La medida del volumen de una habitación midiendo su longitud, anchura y altura, multiplicando esas dimensiones.

c) La medida del volumen de un líquido, colocándolo en una probeta graduada.

LABORATORIO 2

ESTUDIO Y ANÁLISIS DE GRÁFICAS. RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS.

A. Pre-Laboratorio

En el curso anterior debes haber estudiado las gráficas relativas a funciones lineales, luego estudiaste las gráficas (X-t) y (V-t) del movimiento rectilíneo uniforme.

Aquí volveremos a insistir en ellas, debido a su importancia para la física y otras ciencias, en donde relacionaremos variables que regirán ciertos fenómenos. Nuestro propósito es que seas capaz de deducir la ecuación que rige a los fenómenos que estudiamos, describiendo las variables que relacionan dicho fenómeno.

Pendiente de una recta

Consideremos una línea recta, como lo indica la figura L-2-1.

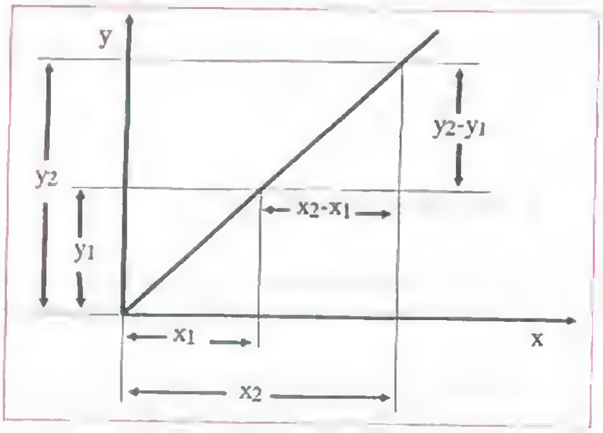


Figura L-2-1

$y_2 - y_1 = \Delta y$

$x_2 - x_1 = \Delta x$

La pendiente viene dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ejemplo:

Sea la función $y = 4x$

Dándole valores arbitrarios a la x, tales como: x = 0; 1; 2; -1; -2, podemos construir la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	-1	-2
y	0	4	8	-4	-8

Tabla L2.1

La gráfica de "y" en función de "x" es:

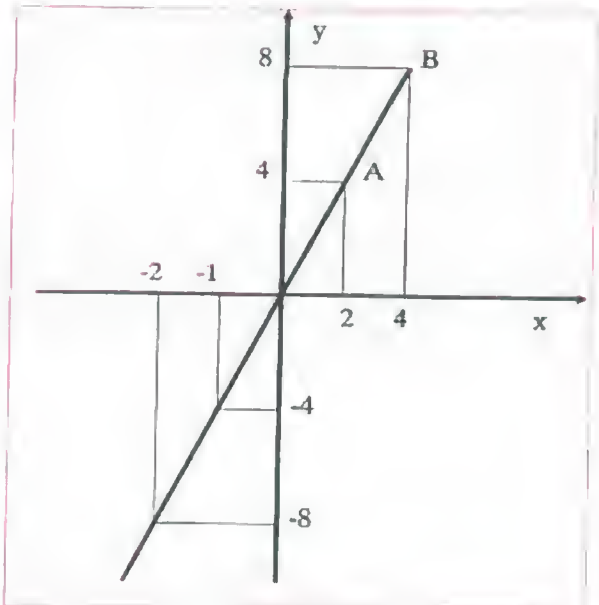


Figura L-2-2

Análisis de la gráfica:

- La gráfica obtenida es una recta que pasa por el origen.
- El valor de la pendiente de la recta lo obtenemos mediante la expresión.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Las coordenadas de los puntos A y B seleccionados sobre la recta son:

$A(x_1, y_1) = A(1,4)$

$B(x_2, y_2) = B(2,8)$

La pendiente será:

$$m = \frac{8-4}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Este valor de la pendiente es igual al valor de la constante de proporcionalidad. Obsérvese que el valor obtenido es el coeficiente de la "x" en la función "y" = 4x.

Esta función es de la forma y = mx, en donde "m" representa el valor de la pendiente de la recta y las variables "y" y "x" son directamente proporcionales.

Conclusión:

Si "y" es una magnitud que se relaciona con otra magnitud "x", mediante la función y = mx; y la gráfica de ésta relación es una recta que pasa por el origen, se dice que "y" y "x" son directamente proporcionales. El valor de "m" será **la constante de proporcionalidad.**

Variación lineal

Consideremos la función y = 4x - 3.

Dándole valores arbitrarios a la x, tales como x = 0; 1; 2; -1; -2, podemos construir la siguiente tabla de valores:

x	0	1	2	-1	-2
y	-3	1	5	-7	-11

Tabla L2.2

La gráfica de "y" en función de "x" es la mostrada en la figura. L-2-3

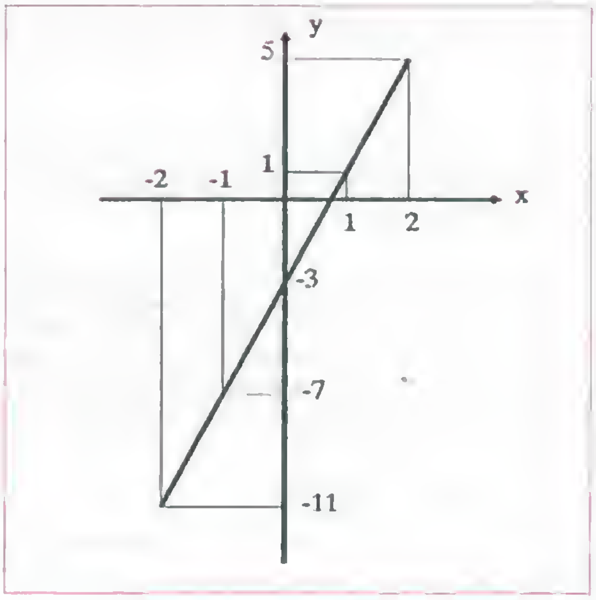


Figura. L-2-3

Análisis de la gráfica:

- La gráfica obtenida es una recta que no pasa por el origen, corta el eje de las ordenadas en -3.
- La relación entre "y" y "x" no es una proporción directa, porque el gráfico no pasa por la intersección de los ejes. Nótese que al duplicar el valor de "x", el valor de "y" *no se duplica, tal como ocurría en la proporcionalidad directa.*

Este tipo de relación, como la que existe entre "y" y "x", recibe el nombre de **variación lineal**

Si calculamos el valor de la pendiente de la recta, obtenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{2 - 1}$$

$$m = \frac{4}{1} = 4$$

Obsérvese que es el mismo valor de la pendiente en la gráfica anterior.

Esta función es de la forma $y = mx + b$, en donde "m" representa el valor de la pendiente de la recta; "b" representa el punto donde la recta corta al eje de ordenadas. En este caso, las magnitudes no son directamente proporcionales, aun cuando sea una función lineal.

Funciones de la forma $y = mx^2$

Consideremos la función $y = 2x^2$

Dándole valores arbitrarios a "x", tales como: x = 1; 2; 3; 4; 5; podemos construir la siguiente tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	2	8	18	32	50

Tabla L2.3

La gráfica de "y" en función "x" es la figura L-2-4.

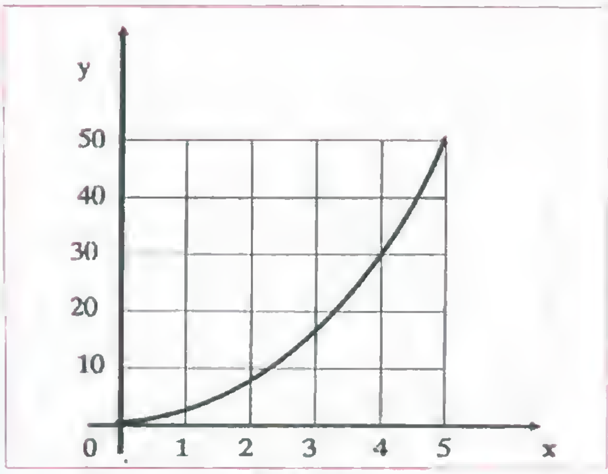


Figura L-2-4

Análisis de la gráfica

- La gráfica obtenida es una curva llamada parábola.
- Esta gráfica no nos da la información necesaria sobre la proporcionalidad entre las variables, tal como lo hacen las funciones lineales, que al representarlas gráficamente es una recta.

En general, cuando una relación entre dos variables es diferente a una proporción directa, la gráfica no es una recta, no pudiéndose obtener una verificación completa de la relación entre dichas variables. Una relación matemática sólo puede ser verificada con exactitud a partir de una gráfica rectilínea.

Linealización de gráficas

Hemos visto que la no linealidad de los gráficos dificulta el problema de la investigación experimental de la relación entre dos magnitudes.

Si deseamos establecer una relación matemática entre dos magnitudes "x", "y", podemos, en el laboratorio, medir los valores de "x" y los correspondientes valores de "y", los cuales son llevados a una tabla de valores para construir una gráfica.

- Si la gráfica es una recta que pasa por el origen, sabemos que la función es de la forma $y = mx$.
- Si la gráfica no pasa por el origen, continúa siendo una recta, tratándose de una **variación lineal**, escribiéndose, que la función es de la forma $y = mx + b$, en donde "m" es el valor de la pendiente, y "b" el punto donde la recta corta las ordenadas.
- Si la gráfica es una parábola o una hipérbola, es imposible afirmar que la relación entre "y" y "x" sea $y = mx^2$ o $y = mx^3$.

Para solucionar este último problema, se transforma la gráfica de "y" en función de "x", en una gráfica "y" en función de "x^2" la cual nos dará una recta. A este proceso se le llama **Linealización de gráficas**.

De esta forma, si en la investigación experimental de la relación entre las variables se obtiene una gráfica que es una parábola, nos conduce a sospechar que la función es $y = mx^2$. El valor de

"m" se obtiene calculando la pendiente de la recta en la gráfica de "y" en función de x^2.

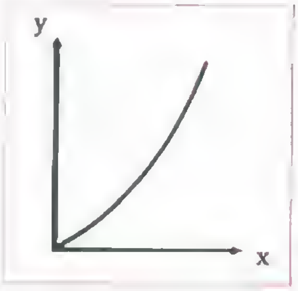


Figura. L-2-5 (a)

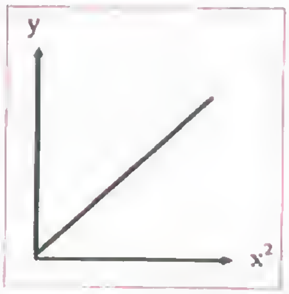


Figura. L-2-5 (b)

En la Figura, L-2-5 (a) tenemos la gráfica de "y" en función de "x^2"

En la figura L-2-5(b) tenemos la gráfica de "y" en función de "x^2".

Relaciones inversas $(y = \frac{1}{x})$

Sea la función $y = \frac{1}{x}$

Si le damos valores a "x", obtenemos la tabla L2.4

x	1	0,5	0,25	2	4	5	1,5
y	1	2	4	0,5	0,25	0,2	0,66

Tabla L2.4

Si hacemos la gráfica de "y" en función de "x", obtenemos una hipérbola, representando ella la relación:

$$y = \frac{m}{x}$$

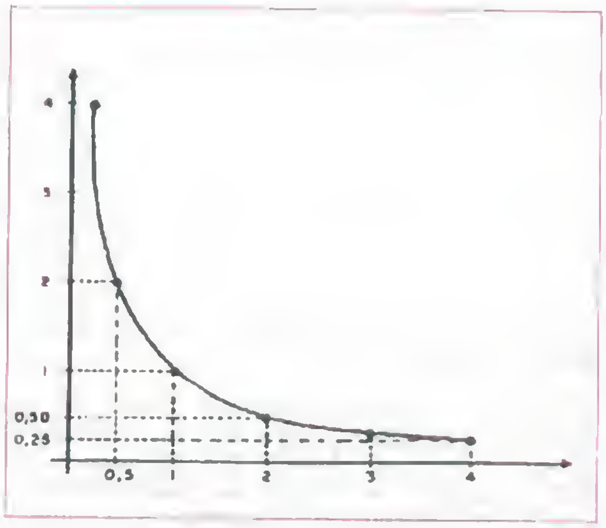


Figura. L-2-6

Esta relación puede linealizarse haciendo el gráfico de "y" en función de: 1/x

1/x	1	2	4	0,5	0,25	0,2
y	1	2	4	0,5	0,25	0,2

Tabla 1.2.5

Si calculamos el valor de la pendiente de la recta, obtenemos el valor de "m".

Al efectuar los productos de cada valor de "x" por su correspondiente valor de "y", en la gráfica de "y" en función de "x", obtenemos una constante:

$$1.1 = 0,5.2 = 0,25.4 = 2.0,25 = 1$$

Cuando esto ocurre, se dice que "y" y "x" son magnitudes inversamente proporcionales.

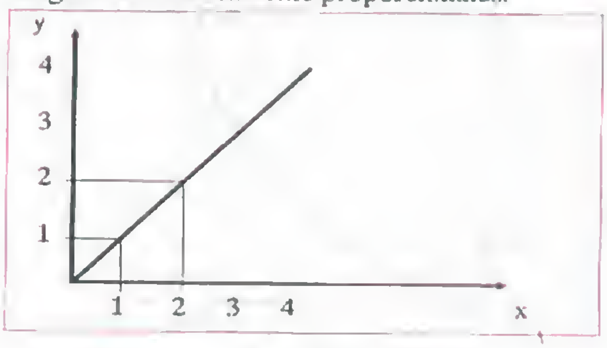


Figura. L-2-7

Conclusión

Dos magnitudes "y" y "x" son inversamente proporcionales cuando el producto entre ellas es igual a una constante.

y = m . x (constante)

La gráfica de "y" en función de "x" es una hipérbola, que puede linealizarse haciendo una gráfica de "y" en función de 1/x .

La pendiente de la recta en la gráfica de "y" en función de 1/x nos da el valor de esa constante.

B. Laboratorio

Material requerido:

Papel milimetrado
Lápices
Regla
Plantilla de curvas

Experiencia 1

A continuación se te da una tabla de datos que estudia la relación entre "y" y "x".

x	-2	-1	1	2	3
y	-8	-4	4	8	12

Tabla L2.6

- Construye en un papel milimetrado la gráfica de "y" en función de "x".
- ¿Qué forma tiene la gráfica?.
- ¿Dónde corta el eje de ordenadas?.
- Calcula el valor de la pendiente.
- ¿Cuál es la función (ecuación) que relaciona a las variables anteriores?.
- Puedes decir, a partir de la gráfica, ¿cuánto vale "y" cuando "x" = -5?.
- ¿Cuánto vale "y" cuando "x" = -1,5?.
- ¿Qué proporcionalidades existe entre las variables "y" y "x"?. ¿Por qué?.

Experiencia 2

A continuación se da una tabla de datos que relaciona a las variables "y" y "x".

x	-1	-3	-2	1	2	3
y	-6	-10	-8	-2	0	2

Tabla L2.7

- Construye en un papel milimetrado la gráfica de "y" en función de "x".
- ¿Qué forma tiene la gráfica?.
- ¿Dónde corta al eje de ordenadas?.
- ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta?.
- ¿Cuál es la función (ecuación), que relaciona a las variables?.
- ¿Puedes decir, a partir de la gráfica, cuánto vale "y" cuando x = 1/2?.
- ¿Cuál es el valor de "x" cuando y = 1/2?.
- ¿Qué tipo de proporcionalidad existe entre "y" y "x"?.

Experiencia 3

Se tiene una familia de rectángulos, cuya superficie S varía cuando varía la altura h, de tal manera que la base b se mantiene constante e igual a 4 cm.

- ¿Puedes decir cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?.
- Escribe la ecuación de la familia.
- ¿Puedes decir cuál es la proporcionalidad entre S y h?
- Dándole valores convenientes a la altura h, calcula cinco valores de la superficie S y llena el siguiente cuadro de valores. Cópialo en tu cuaderno.

h (cm)					
S (cm^2)					

Tabla L2.8

- Con los valores del cuadro anterior, construye en un papel milimetrado la gráfica de S en función de h.
- A partir de la gráfica, calcula la pendiente. ¿Con qué coincide este valor?.

Experiencia 4

A continuación se te da una tabla de datos correspondiente a dos variables de h y t.

h (m)	0	0,05	0,2	0,45	0,8	1,25
t (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Tabla L.2.9

- Construye en un papel milimetrado la gráfica de h en función de t.
- ¿Cómo es la gráfica obtenida?
- ¿Tienes alguna idea de la relación entre h y t?. ¿Por qué?.
- Construye en un papel milimetrado la gráfica de h en función de t^2.
- ¿Cómo es la gráfica obtenida?.
- Calcula el valor de la pendiente. ¿Qué significa este valor?.
- ¿Cuál es la función (ecuación) que relaciona a las variables?.

Experiencia 5

A continuación se te da una tabla de datos correspondiente a dos variables "a" (aceleración) y "m" (masa).

a(cm/s^2)	4	8	16	32	64
m (g)	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

Tabla L.2.10

- Construye en un papel milimetrado la gráfica de "a" en función de "m".
- ¿Cómo es la gráfica obtenida?.
- ¿Puedes escribir la relación existente entre "a" y "m"?. ¿Por qué?.
- Construye la gráfica en función de 1/m. ¿Qué proporcionalidad existe entre las variables?.
- ¿Cómo es la gráfica obtenida?.
- ¿Cuál es el valor de la pendiente?. ¿Qué representa este valor?.
- Relacionarías esto con alguna ley?.
- ¿Cuál es la ecuación que relaciona a las variables "a" y "m"?.

C. Post-Laboratorio

1. ¿Puedes decir cuál es la diferencia entre interpolación y extrapolación?.

2. El alcance "A" (en Km) de una estación de televisión, se realiza con la altura h (en m) de la antena de la emisora, por una ecuación cuya forma aproximada es:

$$A = 4\sqrt{h}$$

a) Si se duplica la altura de la antena, ¿por qué factor quedará multiplicado el alcance de la emisora?.

b) ¿Cuántas veces más alta deberá ser la antena para que su alcance sea dos veces mayor?.

c) Atribuyendo algunos valores convenientes a "h", calcula los valores correspondientes al alcance de "A" y construye una tabla de datos.

d) Construye la gráfica de "A" en función de "h".

e) ¿Cómo harías para linealizar el gráfico?.

3. Expresa "y" en función de "x" y escribe la ecuación correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

a) "y" es proporcional a "x". Constante de proporcionalidad K.

b) "y" es proporcional a raíz cuadrada de "x". Constante de proporcionalidad 0,8.

c) "y" es proporcional al inverso de "x". Constante de proporcionalidad 5.

d) "y" es proporcional al cubo de "x". Constante de proporcionalidad 4.

e) "y" es proporcional al inverso del cuadrado de "x". Constante de proporcionalidad K.

4. A continuación se dan varias gráficas, donde cada una representa una función.

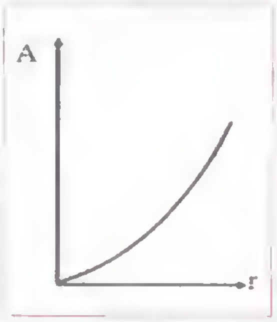


Figura. L-2-8(a)

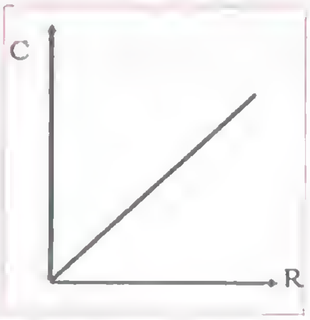


Figura. L-2-8(b)

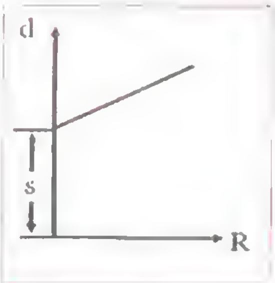


Figura. L-2-8(c)

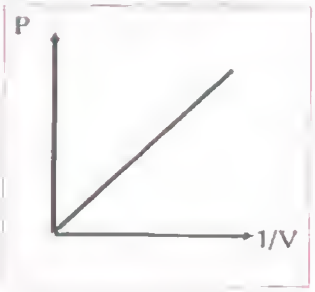


Figura. L-2-8(d)

a) ¿Cuáles son funciones lineales?.

b) ¿Cuáles son las variables dependientes y cuáles las variables independientes?.

c) Cuál es la ecuación que representa a cada una?.

5. En la tabla de datos dada a continuación, se indica la distancia recorrida por una esfera que rueda por un plano inclinado y "t" el tiempo empleado desde la partida.

t(s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
d(cm)	0	5	21	42	85	120	180	240

Tabla L-2.11

a) Construye en un papel milimetrado la gráfica de "d" en función de "t".

b) ¿Son "d" y "t" directamente proporcionales?. ¿Por qué?.

c) Completa en tu cuaderno la tabla, de tal manera que contenga una fila de t^2 y calcúlalo.

d) Calcula la relación d/t^2 y sus unidades.

e) Construye una gráfica de "d" en función de t^2. ¿Estás de acuerdo con la conclusión anterior?.

f) A partir de la gráfica, calcula el tiempo para el cual la esfera ha rodado 15 cm.

g) Expresa mediante una ecuación, la relación existente entre las cantidades representadas gráficamente.

6. ¿Cuándo se dice que "y" y "x" son directamente proporcionales?.

7. ¿A qué se llama variación lineal?.

8. ¿En qué consiste la linealización de gráficas?.

9. Escribe la ecuación de una función cuya recta no pase por el origen?.

10. ¿Por qué es necesario hacer la linealización de una gráfica?.

LABORATORIO 3

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO.

A. Pre-Laboratorio.

En la física acudimos al análisis de las gráficas para la comprensión de un fenómeno dado, porque a través de ellas podemos tener una visión global del fenómeno, que permita con una sola ojeada, ver con mayor claridad los datos que deseamos obtener.

Supongamos que queremos representar la distancia recorrida por el por el móvil, o la rapidez, y hasta la aceleración que desarrolla en un momento dado. Para ello no hay nada mejor que acudir a una gráfica, que por lo general es siempre explícita, permitiendo una rápida y sencilla lectura del fenómeno estudiado.

B. Laboratorio

Material requerido:

- Cinta de papel.
- Registrador de tiempo.
- Baterías de 1,5 voltios.
- Papel carbón cortado en forma circular.
- Un carrito de baterías.
- Papel milimetrado.
- Cinta engomada.

Experiencia 1

Toma una cinta de papel y colócala de tal manera que pase a través de un marcador de cinta. Trata de atarlo a un carrito de pila que tu profesor tendrá en el mesón.Dicho carrito tendrá un movimiento uniforme. Puedes observar que en el papel van apareciendo marcados una serie de puntos.

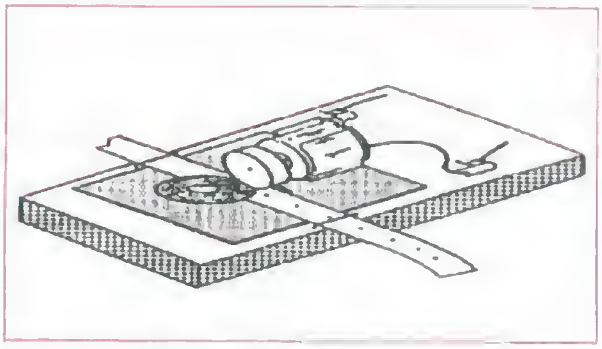


Figura L.3.1

Tu profesor te dará las explicaciones de cómo llenar el siguiente cuadro:

t(tic)							
x(cm)							

Tabla L.3.1

Con los datos de la tabla, construye en un papel milimetrado un gráfico (X,t) y a través de él responde:

- ¿Qué forma tiene la gráfica?.
- Determina la pendiente de la gráfica.
- ¿Qué representa dicha pendiente?.
- ¿Cómo es el movimiento realizado?.
- ¿Qué distancia ha recorrido a 4 tic después de haber partido?.

Experiencia 2

Trata ahora que la cinta sea halada por un carrito dinámico, el cual a su vez está siendo halado por una pesas atadas al extremo de un hilo que pasa

por la garganta de una polea. Haciendo el mismo procedimiento de la experiencia 1, llena el siguiente cuadro de valores.

t(tic)							
x(cm)							

Tabla L.3.2

Construye una gráfica (X,t) y responde lo siguiente:

- ¿Qué forma tiene la gráfica?.
- ¿Cómo es el movimiento realizado?
- Calcula el valor de la pendiente en cada punto.

Experiencia 3

Determinar la rapidez en cada intervalo de tiempo de la experiencia 1, y llenar el siguiente cuadro de valores.

t(tic)							
v(cm/tic)							

Tabla L.3.3

Construye a partir de la tabla, la gráfica de la rapidez en función del tiempo.

- ¿Qué gráfica obtienes?.
- ¿En qué se diferencia con la gráfica de la experiencia 1?.
- Determina la pendiente.
- ¿Qué significa ese valor de la pendiente?. Explica.

Experiencia 4

Determina la rapidez en cada intervalo de tiempo de la experiencia 2, y llena la siguiente tabla:

t(tic)							
v(cm/tic)							

Tabla L.3.4

- ¿Qué gráfica obtienes?.
- Calcula la pendiente.
- ¿Qué representa ese valor?.

C. Post-Laboratorio

1. Invierte los valores de la distancia en la tabla de la experiencia 2, y construye una gráfica (X-t).

- ¿Cómo es la gráfica?.
- ¿Pasa por el origen de coordenadas?.

2. ¿Qué tipo de movimiento representa cada una de las gráficas siguientes?. ¿Qué significado físico tiene cada una de ellas?.

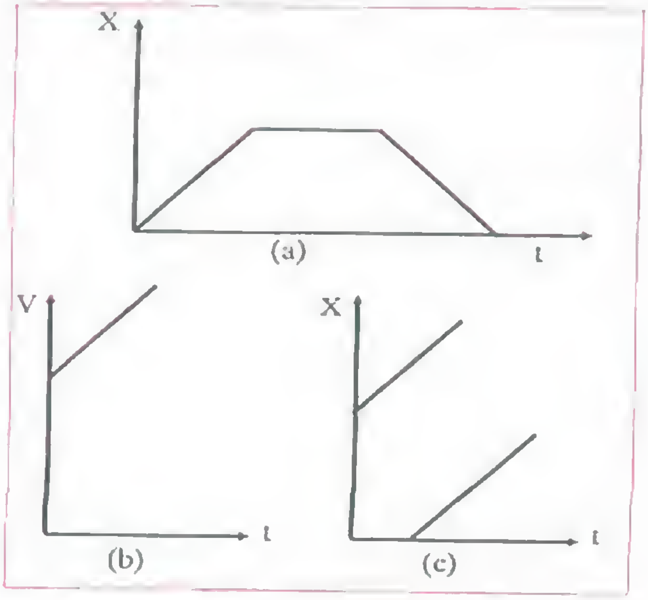


Figura. L-3-2

LABORATORIO 4

CAÍDA LIBRE DE LOS CUERPOS.

A. Pre-Laboratorio

En esta práctica analizaremos la cinemática de la caída libre de los cuerpos. Haremos gráficas con el objeto de ver que la caída libre es un movimiento acelerado. También mediremos el valor de la aceleración de gravedad.

Preguntas

1. ¿Qué sucedería si dejamos caer simultáneamente desde una misma altura, un libro y una hoja de papel?. Explica tu respuesta.

2. ¿Qué sucedería si dejamos caer dos hojas de papel iguales, pero una de ellas comprimida?. explica tu respuesta.

3. ¿Qué sucedería si ambas hojas están comprimidas?.

4. ¿Qué entiendes por caída libre de los cuerpos?.

B. Laboratorio

Materiales:

Cronómetro
Piedras
Metras
Hojas de papel
Esferita de plomo

Experiencia 1

- Desde una misma altura se deja caer simultáneamente una metra y una hoja de papel. ¿Qué observas?.
- Deja caer ahora simultáneamente la metra y la hoja de papel comprimida.
- A qué se deben las diferencias en la caída en los dos casos anteriores.
- ¿Cómo se llaman las fuerzas que actúan en la caída?.

Experiencia 2

Aquí determinaremos el valor de la aceleración de gravedad. Recordemos que la ecuación de la caída libre viene dada por:

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Si despejamos g, obtenemos que:

$$g = \frac{2y}{t^2}$$

- Deja caer un cuerpo desde alturas diferentes, las cuales has medido previamente. Con ayuda de un cronómetro mide el tiempo de caída en cada caso. Recuerda que debes hacer el promedio del tiempo de caída en cada caso que será el valor que anotarás en la tabla.
- Llena el siguiente cuadro y complétalo.
- ¿Qué observas en la última columna?.

y(m)	t(s)	$t^2(s^2)$	$g(m/s^2)$

Tabla L.4.1

- Si el valor obtenido no coincide exactamente con el valor de "g" esperado, ¿qué crees que pudo haber ocurrido?.

- Toma el promedio de los cuatro valores de "g" obtenidos.

C. Post-Laboratorio

1. ¿Cuáles de las gráficas dadas a continuación, representan una caída libre?. Explica por qué?.

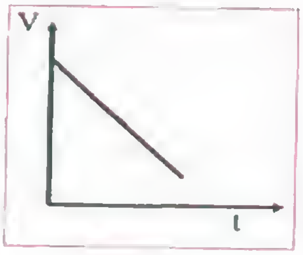


Figura. L-4-1

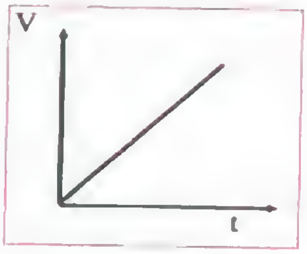


Figura. L-4-2

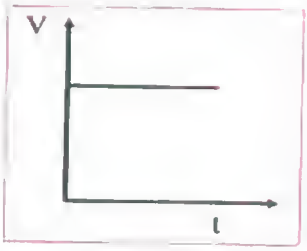


Figura. L-4-3

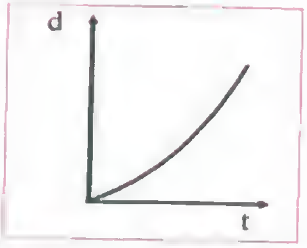


Figura. L-4-4

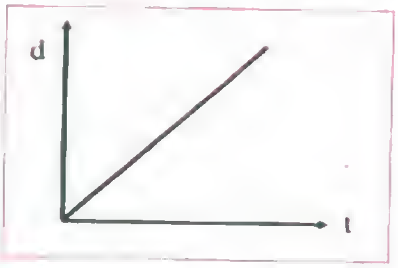


Figura. L-4-5

2. Se conoce que el valor de "g" es constante en un mismo lugar, pero varía en distintos lugares. ¿Puedes decir cuáles son los factores que influyen en esta variación?.

3. La aceleración de gravedad es un vector. ¿Qué dirección y sentido tiene?.

4. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 200 m/s. Si se desprecia la resistencia del aire, determina; (usa: g = 9,8 m/s^2).

a) La velocidad del cuerpo al cabo de 12 segundos.

b) La posición del cuerpo a los 10 segundos de lanzamiento.

c) Altura máxima alcanzada.

d) Tiempo de subida.

R: a) 82,3 m/s b) 1510 m c) 2040,81 m d) 20,4 s

5. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con la velocidad de 735 m/s.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en regresar al punto de lanzamiento?.

b) ¿Cuál es la altura alcanzada?.

c) ¿Cuál es la velocidad a los 18 s?. Usa: g = 9,8 m/s^2.

R: a) 150 s b) 27562,5 m c) 558,6 m/s

6. Se deja caer libremente un cuerpo desde un punto A. Al pasar por un punto B de su trayectoria lleva una velocidad de 39,2 m/s y pasa por un punto C con una velocidad de 58,8 m/s. ¿Cuál es la distancia vertical entre los puntos B y C?.

R: 98 m

7. Se deja caer libremente un cuerpo y 5 segundos más tarde se deja caer otro. ¿Qué velocidad inicial es necesario darle al segundo cuerpo para que alcance al primero cuando éste lleve una velocidad de 245 m/s?. ¿Qué altura habrán descendido los dos cuerpos, cuando el primero alcanza al segundo?.(Use g = 9,8 m/s^2).

R: 55,125 m/s ; 3062,5 m.

8. Un astronauta en la luna lanzó un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 16 m/s. Si el objeto demoró 10 segundos en alcanzar el punto más alto de su trayectoria, calcular:

a) ¿Cuál es el valor de la aceleración de gravedad en la luna?.

b) ¿Qué altura alcanzó el objeto?.

c) Si el objeto hubiese sido lanzado verticalmente hacia arriba con la misma velocidad

inicial en la tierra, ¿qué altura habría alcanzado?. Use, $g = 9,8 \ m/s^2$.

R: a) 1,6 m/s b) 80 m c) 13,06 m

9. Desde una misma altura se sueltan dos cuerpos con intervalos de 1 segundo. ¿Cuánto tiempo después desde que empieza a caer el primero, estarán separados por una distancia de 10 metros?.

R: 1,52 s

10. Desde el borde de un precipicio se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad de 20 m/s. Calcular:

a) ¿Dónde se encontrará al cabo de 5,5 s?.

b) ¿Cuál es su velocidad en ese instante?.

c) ¿Cuánto tiempo tardará en tocar el fondo del precipicio cuya altura de 160 metros?.

d) ¿Cuánto tiempo requerirá para llegar a una altura de 15 m por encima del punto de partida?.

e) ¿Con qué velocidad llegará el móvil al fondo del precipicio?. Use, $g = 10 \ m/s^2$.

R: a) -38,22 m b) -33,9 m/s c) 8 s

d) 2,33 s y 1,75 s e) - 59,46 m/s.

11. Desde lo alto de un edificio se deja caer una piedra. Cuando hayan transcurrido 0,5 s después de haberse dejado caer, se lanza otra piedra con una velocidad de 10 m/s. ¿Dónde y cuándo alcanzará la segunda piedra la primera?. Use $g = 9,8 \ m/s^2$.

R: 2,68 m ; 0,24 s.

12. Desde un punto se lanza hacia arriba un cuerpo con velocidad de 40 m/s y 2 s después se lanza otro con velocidad desconocida. El encuentro tiene lugar en el punto de lanzamiento. Calcular:

a) El tiempo que tardan en encontrarse.

b) La velocidad inicial del segundo cuerpo.

Use $g = 9,8 \ m/s^2$.

R: a) 8,163 s b) 30,2 m/s.

LABORATORIO 5

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

A. Pre-Laboratorio

Consideremos una esferita que rueda por una mesa colocada en posición horizontal, tal como lo indican las figuras L-5-1 y L-5- 2.

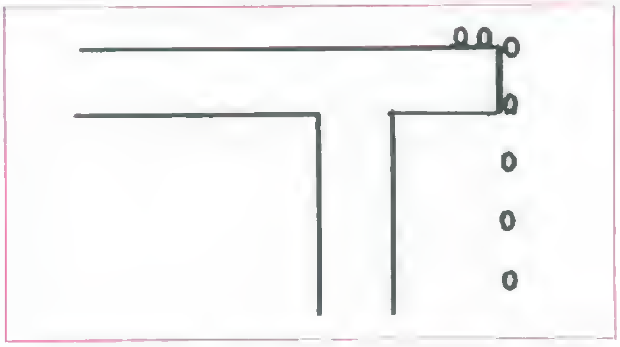


Figura L-5-1

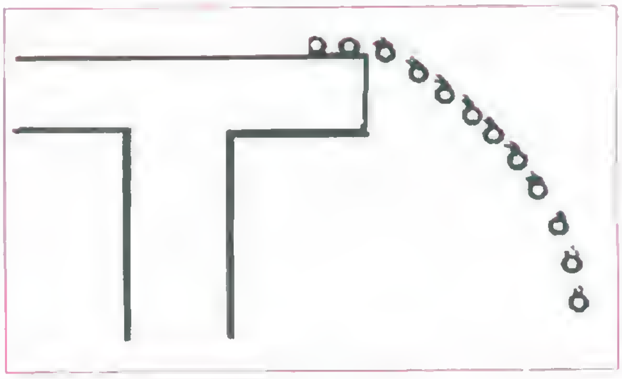


Figura L-5-2

Como puede notarse en la figura L-5-1, la esferita cae como si lo hiciese en caída libre. No así en la figura L-5-2, la cual describe una trayectoria parabólica.

Nuestra pregunta es: ¿seguirá una trayectoria parabólica o continuará moviéndose en línea recta?.

En la realidad, como podemos notar en la figura L-5-3, existen dos movimientos simultáneos: uno **horizontal**, el cual es uniforme; otro **vertical**, el cual es uniformemente acelerado.

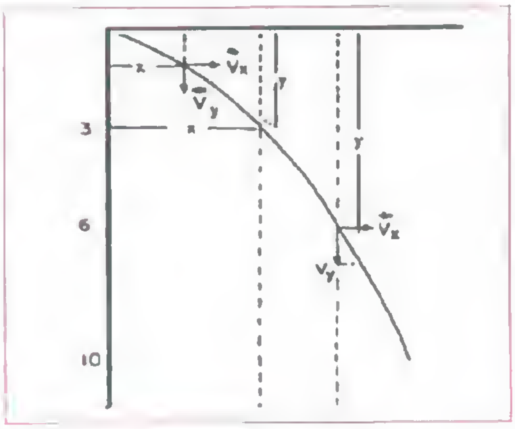


Figura L-5-3

El primero no está provisto de aceleración, razón por la cual se le llama uniforme. La ecuación para calcular el desplazamiento horizontal "x" en cualquier instante, viene dada por:

$$x = V_o.t$$

El segundo está dotado de aceleración de gravedad, pudiéndose calcular el desplazamiento vertical "y" en cualquier instante mediante la ecuación:

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Cada uno de estos movimientos es independiente uno del otro, obrando cada uno de ellos como si el otro no existiera.

Las ecuaciones de la velocidad en un instante cualesquiera son:

$V_x = V_o$

Esto porque el movimiento horizontal es con velocidad constante.

$V_y = g.t$

Esto porque el movimiento en la dirección vertical es uniformemente acelerado.

La magnitud de la velocidad resultante viene dada por:

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

B. Laboratorio

Experiencia 1

Materiales:

- Rampa acanalada
- Esferitas de acero
- Papel blanco
- Papel carbón
- Papel milimetrado

Dispongamos de una canal (rampa acanalada) y una esferita de acero, la cual rodará a través de la rampa, y al llegar al borde de la mesa estará dotada de cierta velocidad inicial V_o, la cual será la misma si dejamos rodar la esferita desde un mismo punto de la rampa.

Figura L.5.4

Coloquemos la rampa acanalada de tal manera que su borde coincida con el borde de la mesa, tal como lo indica la figura L-5-4.

- ¿Cae la esferita en dirección vertical?.
- ¿Continúa la esfera en línea recta?.

Nuestro propósito consiste en medir las posiciones horizontales y verticales de la esferita en su caída, el cual lograremos con el montaje que muestra la figura.

- Utilizando una plomada, marcar un punto, situado verticalmente debajo del borde de la mesa.
- Toma una tabla aproximadamente de unos 15 cm de ancho. Su altura debe ser igual o mayor que la altura de la mesa del laboratorio. Fórrala primero con papel blanco y luego con papel carbón.
- Coloca la tabla de tal forma que coincida con el borde de la rampa acanalada y marca en ese punto una raya horizontal.
- Retira la tabla 10 cm (primer desplazamiento horizontal) medidos a partir del punto que marcaste con la plomada. Deja rodar la esferita, la cual marcará un punto sobre el tablero, que medido desde la raya horizontal te dará el primer desplazamiento vertical.
- Si repites el proceso, alejando la tabla de 10 cm en 10 cm, obtenemos el resto de los desplazamientos verticales, los cuales serán siempre medidos a partir de la raya horizontal que marcaste en la tabla.
- Con los valores obtenidos, llena el siguiente cuadro:

x(cm)	0	10	20	30	40	50	60	70
y(cm)								

Tabla L.5.1

- Construye en una hoja de papel milimetrado una gráfica de "y" en función de "x", con la correspondiente observación de que el eje "y" es negativo.
- ¿Cómo es la gráfica obtenida?.

- ¿Coincide la gráfica con la trayectoria que observaste al caer la esferita?.
- ¿Cuál crees que es la relación entre "y" y "x"?.
- Construye la gráfica de "y" en función de "x".
- Calcula la pendiente.

C. Post-Laboratorio

1. El movimiento de la esferita que describe una trayectoria parabólica es con aceleración constante y es un movimiento rectilíneo uniformemente variado. La aceleración también es constante. ¿Podrías explicar en qué difiere un movimiento de otro en cuanto a las direcciones de la aceleración y velocidad?.

2. ¿Por qué el módulo de la componente horizontal de la velocidad permanece constante durante toda la trayectoria?. Explica.

3. ¿Qué sucede si en el momento en que la esfera abandona la canal, se deja caer verticalmente otra esfera de la misma altura?.

a) ¿Qué tipo de movimiento realiza la esferita en su caída vertical?.

4. En el preciso instante en que la esferita abandona la canal, ¿cuál crees que es el módulo de la componente vertical de la velocidad inicial?.

a) ¿Cuál crees que es el módulo del vector velocidad en ese instante?.

5. ¿Qué sucedería, si en cada instante dejamos rodar la esferita por la canal desde diferentes puntos?. Haz un gráfico que ilustre tu respuesta.

6. Investiga sobre tres casos donde se de esta clase de movimiento.

7. En la expresión que te permite calcular el desplazamiento horizontal, despeja "t" y sustitúyela en la expresión del desplazamiento vertical.

a) Haz $\frac{1}{2}\,\frac{g}{Vox^2} = K$

b) ¿Qué representa la expresión obtenida?.

8. Un proyectil es disparado horizontalmente por un cañón situado a 44 metros por encima de un plano horizontal con una velocidad de 244 m/s. Calcular:

a) Tiempo que dura el proyectil en el aire.

b) El alcance horizontal.

c) La magnitud de la componente vertical de la velocidad a los 2 segundos. Usar $g = 9{,}8\ m/s^2$.

R: a) 2,99 s b) 729,56 m c) 19,6 m/s

9. Un proyectil se dispara horizontalmente de la orilla superior de un edificio de 20 metros de altura y choca contra la tierra a una distancia de 30 metros de la base del edificio. ¿Con qué velocidad se lanzó el proyectil?.

R: 14,84 m/s

10. Los peldaños de una escalera tienen 12 cm de altura y 24 cm de ancho. ¿Qué velocidad mínima debe suministrársele a una esfera para que caiga justamente en el extremo del décimo peldaño?. Usar $g = 9{,}8\ m/s^2$.

R: 53,25 cm/s

11. Un muchacho, desde una ventana en un muro vertical, lanza una pelota con una velocidad de 19,6 m/s. Calcular:

a) La velocidad al cabo de 4 s.

b) El desplazamiento vertical.

c) El desplazamiento horizontal.

d) Alcance horizontal sabiendo que el tiempo de vuelo es 5 s.

c) Altura del tejado.

R: a) 43,82 m/s b) 78,4 m c) 78,4 m

d) 98 m e) 122,5 m

12. Desde una torre de 30 m de altura se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad inicial de 100 m/s. Calcular a qué distancia del pie de la torre tocará el suelo.

R: 247 m

13. Se dispara una bala de rifle en dirección horizontal, con una velocidad inicial de 270 m/s. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, ¿cuánto habrá descendido mientras ha avanzado en sentido horizontal?: a) 50 m; b) 100 m; c) 150 m; d) ¿cuánto descenderá en 1 s?.

R: a) 0,18 m b) 0,67 m c) 1,54 m d) 4,9 m

14. Un avión se desplaza horizontalmente con velocidad de 720 Km/h a una altura de 6000 m. Calcular:

a) La distancia horizontal con un blanco, a la cual debe dejar caer una bomba para que de en él.

b) La velocidad y ángulo con la horizontal de la bomba al hacer impacto.

R: a) 6998 m b) 396,97 m/s; 59° 44' 45''

15. Desde una altura de 100 m se lanza un objeto horizontalmente que cae al suelo a una distancia de 200 m de la vertical. Calcular:

a) La velocidad de lanzamiento.

b) La velocidad y ángulo con la horizontal en el punto de llegada.

R: a) 44,25 m/s ; b) 62,61 m/s; 45° 1'

LABORATORIO 6

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

A. Pre-Laboratorio,

Entre el curso anterior y parte de este, hemos analizado cuatro tipos de movimiento.

1. **Rectilíneo y uniforme:** el cual se realiza con velocidad constante.

2. **Rectilíneo acelerado:** donde la aceleración es constante. La velocidad varía en módulo pero permanece constante en dirección y sentido.

3. **Movimiento de proyectiles:** considerado como una combinación de los dos primeros.

4. **Circular uniforme:** donde son constantes en módulo, la velocidad y la aceleración aun cuando varía en dirección y sentido.

Existe otro tipo de movimiento de vaivén, el cual se origina cuando ciertos cuerpos son separados de su posición de equilibrio, caracterizándose por estar sometidos a una aceleración variable. Esta aceleración es proporcional al desplazamiento y está dirigida hacia la posición de equilibrio. Como ejemplo tenemos:

- Un péndulo para pequeñas oscilaciones (figura. L-6-1).

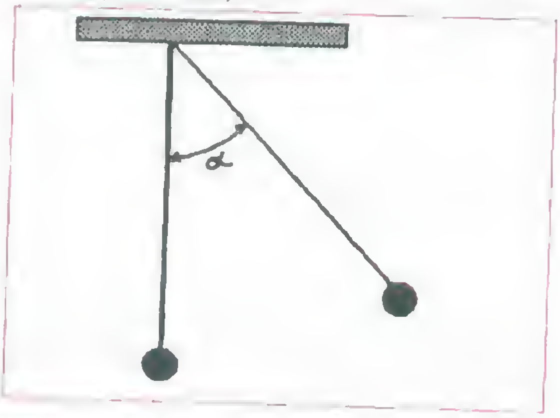


Figura. L-1-6

- Un cuerpo que oscila alrededor de su posición de equilibrio, a uno y otro lado de ésta (figura. L-6-2).

Si separamos la masa de su posición de equilibrio (figura. L-6-2(a)) hacia la derecha y se suelta, aparecerá una aceleración dirigida hacia la izquierda, por la presencia de una fuerza llamada **fuerza recuperadora** del resorte.

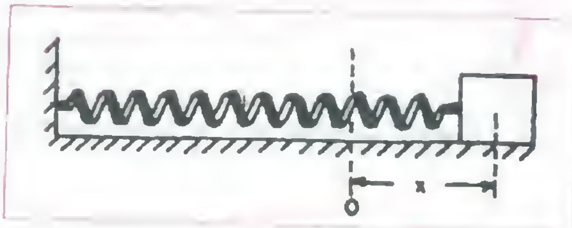


Figura. L-6-2(a)

A medida que la masa se desplaza hacia la izquierda, va disminuyendo la fuerza del resorte, y como consecuencia la aceleración va disminuyendo y la velocidad ha ido aumentando.

Cuando pasa por la posición de equilibrio (figura. L-6-2(b)), la aceleración es nula y la velocidad es máxima, por lo que el cuerpo continúa moviéndose hacia la izquierda. La fuerza recuperadora del resorte tiene ahora dirección opuesta.

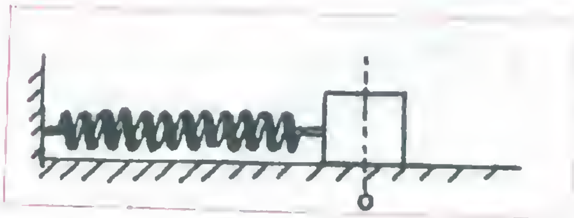


Figura. L-6-2(b)

Cuando ha pasado de la posición de equilibrio hacia la izquierda (figura L-6-2(c)), la aceleración tiene dirección hacia la derecha, la velocidad disminuye hasta alcanzar un valor cero en el extremo izquierdo, iniciándose a continuación la repetición del movimiento.

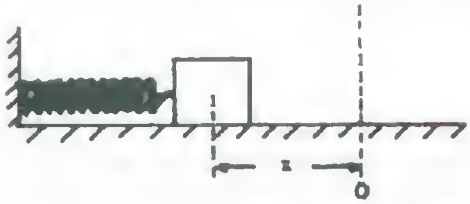


Figura. L-6-2(c)

De esta manera, definimos el movimiento armónico simple (M.A.S.), así:

"Es un movimiento periódico que ocurre cuando sobre un cuerpo desplazado de su posición de equilibrio actúa una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento y en dirección opuesta a él".

El movimiento armónico simple es:

- **Oscilatorio:** porque la partícula dotada de ese movimiento lo hace a uno y otro lado de la posición de equilibrio.
- **Periódico:** porque se repite a intervalos de tiempos iguales.
- **Armónico:** porque la velocidad, el desplazamiento y la aceleración de la partícula en movimiento son descritas a través de las funciones armónicas (seno y coseno).
- **Simple:** porque es necesario distinguirlo de movimientos como el amortiguado, en el cual se considera la pérdida de energía por rozamiento.

Preguntas:

1. Haz una conjetura (suposición): de cómo debe influir la longitud, la masa y el ángulo descrito, en el período de un péndulo.

2. Investiga en la parte teórica de este texto las magnitudes necesarias para la descripción de un M.A.S.

* Elongación
* Período
* Velocidad
* Amplitud
* Frecuencia
* Fuerza recuperadora

3. Escribe las ecuaciones cinemáticas del M.A.S. para el desplazamiento (elongación) velocidad y aceleración.

4. Expresa la ecuación de la elongación de un M.A.S. en función de:

* El período
* La frecuencia

5. ¿Qué es un péndulo?. Haz un diagrama representando un péndulo desplazado de su posición de equilibrio, formando un ángulo con la vertical. Expresa la fuerza recuperadora que actúa sobre la esfera, considerándola como la componente del peso mg, en la dirección tangente a la trayectoria.

6. Demuestra matemáticamente, que el péndulo simple tiene un M.A.S. para amplitudes pequeñas de oscilación.

7. Escribe la ecuación para determinar el período de un péndulo.

8. Deduce la ecuación que nos da el período de un oscilador en función de su masa y de la constante elástica. Compara esta ecuación con la ecuación que nos da el período del péndulo. ¿Qué observas?.

B. Laboratorio

Nuestro propósito consiste en encontrar algunos factores que influyen en el período de un péndulo, tales como la longitud, la masa y el ángulo que describe al oscilar.

Materiales:

Esferas de diferentes diámetros (pueden ser de hierro, aluminio o latón).
Cuerda (hilo)
Soporte
Cronómetro

Experiencia 1

Aquí veremos como es afectado el período del péndulo cuando varía la longitud.

- Toma una esfera metálica y un trozo de hilo. Construye un péndulo de 10 cm de longitud, medidos desde el punto de suspensión hasta el centro de la esfera.

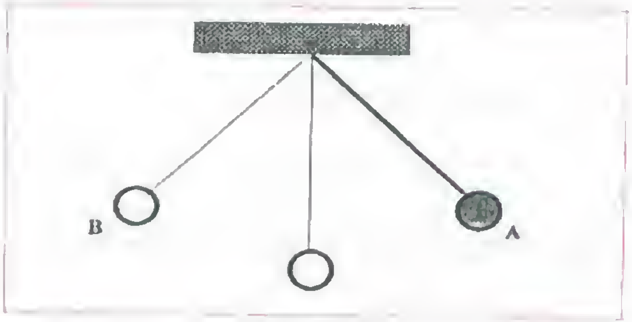


Figura. I-6-3

- Desplaza la esferita 2 cm de su posición de equilibrio y mide el tiempo en el que realiza 20 oscilaciones.
- Repite la experiencia con longitudes del péndulo de 20 cm, 25 cm y 100 cm, usando la misma esfera y desplazándola siempre 1/5 de la longitud del hilo.
- Llena en tu cuaderno el cuadro siguiente:

l (cm)	x l/5(cm)	t (20 osc.)	T s	T^2 s^2
10	2			
20	4			
25	5			
100	20			

- Construye una gráfica con T^2 en el eje "y" y l en el eje "x".
- A partir de la gráfica, deduce la relación que existe entre el período de un péndulo y su longitud.

Experiencia 2

Veamos cómo afecta la masa al período del péndulo.

- Toma tres esferas de diferente masa y construye tres péndulos que tengan la misma longitud (por ejemplo 12 cm).
- Desplaza la esfera de su posición de equilibrio una misma distancia (2 cm) y comienza a contar 20 oscilaciones, para cada masa.
- Llena el siguiente cuadro:

masa(kg)	tiempo(20 osc)	período T(s)

- ¿Qué observas en la última columna?.
- ¿Qué concluyes?.

C. Post-Laboratorio

1. A continuación se te dan una serie de afirmaciones. Di cuáles son falsas y cuáles verdaderas. En caso de ser falsa, explica por qué.

- Todo movimiento periódico es un M.A.S.
- Todo M.A.S. es movimiento periódico.
- En el M.A.S. el período es proporcional al cuadrado de la amplitud.
- En un oscilador armónico el período es proporcional a la masa.
- El movimiento de un péndulo simple es armónico simple para cualquier desplazamiento angular inicial.

- El período de un péndulo varía con su masa.
- El período de un péndulo es independiente de su longitud.
- En el M.A.S. la aceleración es proporcional al desplazamiento y de sentido opuesto.
- Cualquier movimiento en que la aceleración sea proporcional al desplazamiento y tenga sentido opuesto a éste es armónico.
- El movimiento cerca de una posición de equilibrio estable es generalmente un M.A.S., si los desplazamientos son pequeños.

2. ¿Cómo puedes usar la ecuación del período de un péndulo para determinar la aceleración de gravedad?.

3. ¿Qué diferencias encuentras con respecto a la energía, entre un oscilador y un movimiento ondulatorio?.

4. ¿Qué función tiene la fuerza restauradora?.

5. Cuando la elongación es máxima, la velocidad de la partícula en movimiento es cero. ¿Por qué?.

6. Cuando la velocidad aumento, ¿hacia dónde se dirige la partícula?.

7. ¿En qué punto de la trayectoria la aceleración es nula?.

8. ¿Cuál es el módulo de la fuerza restauradora en el caso anterior?.

9. Partiendo de la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ deduce la expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Desarrolla las siguientes preguntas en tu cuaderno:

10. ¿Qué entiendes por fuerza recuperadora?.

11. ¿Qué es un movimiento periódico?. Escribe un ejemplo.

12. Define lo que es un péndulo simple.

13. ¿El péndulo simple tendrá alguna aplicación en nuestra vida?.

14. Cuando un reloj de péndulo adelanta. ¿Qué ajuste es necesario hacer?.

Usando la ecuación deducida anteriormente, resuelve los problemas siguientes:

15. Una masa de 5 Kg está unida a un resorte de constante K = 5 N/m. Si se hace oscilar, calcular:
a) Velocidad angular
b) Frecuencia
c) Período

R: a) 3,16 rad/s; b) 0,5 hertz; c) 2 s

16. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de un sistema masa resorte que oscila, si m = 1 Kg y K = 16 N/m?.

R: $6{,}37.10^{-1}$ hz

17. Un péndulo de masa 0,2 Kg y longitud 1 m, oscila en un lugar de la tierra donde la aceleración gravitacional vale 10 m/s^2. Calcular:
a) Su período.
b) La frecuencia.
c) La velocidad angular.

R: a) 1,99 s b) 0,5 Hertz; c) 3,14 rad/s

18. ¿Cuál debe ser la longitud de un péndulo para que una oscilación completa dura 1 segundo? (Usese g = 10 m/s^2).

R: 0,248 m

19. Una partícula de masa 10^{-1} Kg realiza un M.A.S., si su frecuencia es 5.10^{-1} hertz y su amplitud es 2.10^{-1} metros, calcular:

a) El período
b) Su velocidad angular
c) Su velocidad máxima
d) La aceleración máxima
e) Fuerza efectuada sobre la partícula.

R: a) 2 s; b) π rad/s; c) 0,68 m/s

d) 1,97 m/s; e) 0,197 N

20. Un cuerpo de 5 Kp cuelga de un resorte y oscila con una frecuencia de 4 s^{-1}. Calcular cuánto se alarga el resorte en el momento de colgar el cuerpo

LABORATORIO 7

LEYES DE NEWTON

A. Pre-Laboratorio.

En esta práctica haremos el estudio sobre las tres leyes de Newton, llamadas también **leyes de la dinámica**, las cuales son:

1. Primera ley de Newton o ley de inercia.

2. Segunda ley de Newton o ley de la masa.

3. Tercera ley de Newton o ley de acción y reacción.

Investiga y responde en tu cuaderno lo siguiente:

- ¿Qué es la fuerza de roce?.
- ¿Qué es la fuerza de reacción normal?.
- ¿Qué es el peso de un cuerpo?.
- ¿Qué entiendes por inercia?.
- Enuncia la primera ley de Newton o ley de inercia.
- Explica tres ejemplos que la pongan de manifiesto.
- ¿Quién, antes de Newton, hizo experiencias sobre el comportamiento de los cuerpos en movimiento?.
- ¿Puedes hacer un breve recuento sobre esas experiencias?.
- ¿Por qué entonces se llama primera ley de Newton?.
- Enuncia la segunda ley de Newton y escribe su expresión matemática.
- Enuncia la tercera ley de Newton. Da ejemplos que la pongan en evidencia.

B. Laboratorio

Materiales:

Carritos dinámicos
Pesas de gancho
Cintas de timer. Cronómetro.
Ticógrafo. Dinamómetros. Poleas
Soportes
Papel milimetrado

Experiencia 1

- Desde una rampa acanalada deja caer una esferita, de tal manera que una vez que deje el canal, ruede por el mesón del laboratorio.
- Repite la experiencia, pero ahora una vez que deje la rampa, déjala que ruede por un pedazo de tela.
- ¿Dónde observas que rueda más?.
- ¿Dónde rueda menos?.
- ¿A qué se debe esto?.
- ¿En qué caso rodaría indefinidamente?.

Experiencia 2

- Haga el montaje como el que se indica a continuación en la figura L-7-1. Con él comprobaremos la relación entre la fuerza F, la masa (m) y la aceleración a.
- Una vez que hayas determinado la masa del carrito, procede a colocar pesas en el extremo del hilo, de 100 pondios, 200 pondios y 300 pondios respectivamente.

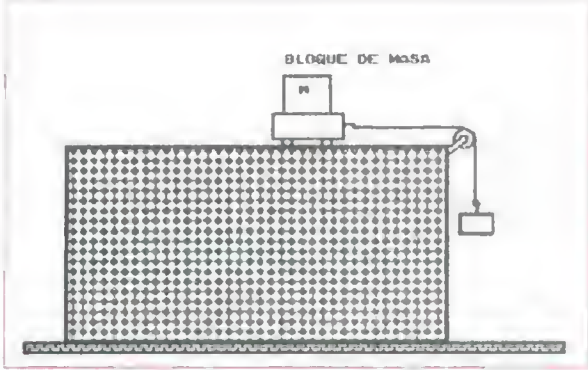


Figura L-7-1

- Mide la longitud "x" recorrida por el carrito sobre la mesa en cada caso y toma el tiempo transcurrido con el cronómetro. Calcula la aceleración en cada caso con la ecuación: $a = 2x/t^2$

F (pondios)	F (dinas)	masa carro (gr)	acel. carro (cm/s^2)

- Compara los valores para la aceleración y la fuerza aplicada. ¿Qué concluyes?.
- Haz el cociente entre la fuerza aplicada y la aceleración obtenida.
- ¿Qué observas en los cocientes?.
- Con los valores de la tabla, haz una gráfica de la fuerza en función de la aceleración. ¿Cómo es la gráfica?. ¿Cuál es el valor de la pendiente?. ¿Qué significa este valor?.

Experiencia 3

- Utilizando el mismo montaje anterior, repite la experiencia pero colocando en el extremo del hilo una misma fuerza, para masas sucesivas del carrito, iguales a: m, 2m y 3m. Procede a calcular la aceleración en cada caso y llena el siguiente cuadro:

masa (gr)	acel. carro (cm/s^2)	F (pondios)	F (dinas)

- Compara los valores de la masa con los de la aceleración. ¿Qué concluyes?.
- Realiza los productos de la masa por su respectiva aceleración ¿Qué observas?.
- ¿Cómo crees que son las magnitudes entre m (masa) y a (aceleración)?.
- De las experiencias (2) y (3), ¿qué concluyes?.

Experiencia 4

En esta experiencia comprobaremos la tercera ley de Newton.

- Coloca un dinamómetro en su soporte fijo.
- Por el extremo libre del dinamómetro engancha otro dinamómetro y hálalo. ¿Qué valor marca cada uno?.
- Hálalo ahora con un poquito de más fuerza. ¿Qué observas?.
- Qué concluyes?.
- Compara tu conclusión en el enunciado de la tercera ley de Newton. ¿Hay alguna similitud?.

C. Post-Laboratorio

1. Haz un eje de coordenadas rectangulares y dibuja un vector fuerza, dirigido desde el origen, de longitud 5 cm y que forme un ángulo de 60^0 con la horizontal. Escala 1 cm = 1 N.

a) Dibuja las componentes rectangulares del vector F.

b) ¿Cuál es el módulo de F_x, componente de F en la dirección del eje x?.

c) ¿Cuál es el módulo de F_y, componente de F en la dirección del eje y?.

2. Se da la figura L-7-2, la cual representa un bloque de masa m que se desliza hacia la izquierda cuando sobre él actúa una fuerza F_1. Suponiendo que consideremos el roce, represente mediante un diagrama de cuerpo libre, todas las fuerzas que sobre él actúan. Escribe la ecuación para la aceleración, aplicando la segunda ley de Newton.

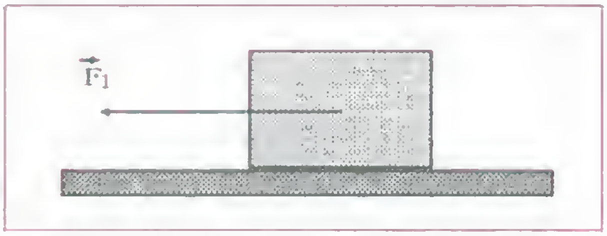


Figura. L-7-2

3.- Observa la figura L-7-3

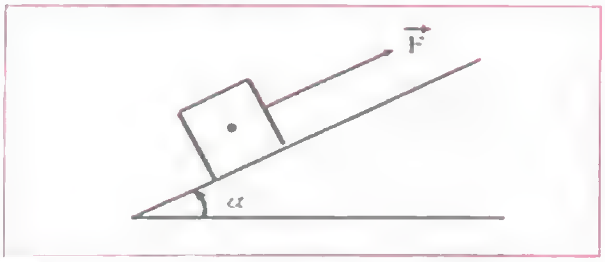


Figura L.7.3

a) Haz un diagrama de cuerpo libre mostrando todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque, suponiendo que su deslizamiento es hacia arriba.

b) Suponiendo que no hay roce, deduce una expresión de la aceleración del bloque en su deslizamiento hacia arriba.

c) ¿Cuál sería la expresión de la aceleración si su deslizamiento es hacia abajo?.

4. Un bloque de 10 Kg está colocado sobre una superficie horizontal lisa. El bloque está adherido a un cable que pasa por una polea ligera y sin rozamiento, del cual pende un segundo bloque de masa 5 Kg.

a) Dibuja el diagrama de cuerpo libre para el bloque de 10 Kg y para el bloque de 5 Kg.

b) Hallar la magnitud de la aceleración del sistema.

c) ¿Cuál es la tensión del cable?.

R: a)3,26 m/s^2 b) 32,6 N

5. Un bloque de madera de 3 Kg está conectado por medio de una cuerda a una masa de hierro de 5 Kg. El conjunto se desliza sobre la superficie de una mesa lisa, bajo la acción de un alambre que tira directamente de la masa de hierro con una fuerza horizontal de 24 Newton. Calcular:

a) La aceleración del sistema.

b) La fuerza con que la cuerda tira del bloque de madera.

R: a) 3 m/s^2 b) 9 N

6. Una masa m_1 está colocada sobre un plano inclinado liso (sin rozamiento) que forma un ángulo ϕ de la horizontal (figura L-7- 4). La masa m_1 está sujeta a un hilo delgado que pasa por una polea ligera y sin fricción, del cual se encuentra suspendida una masa m_2.

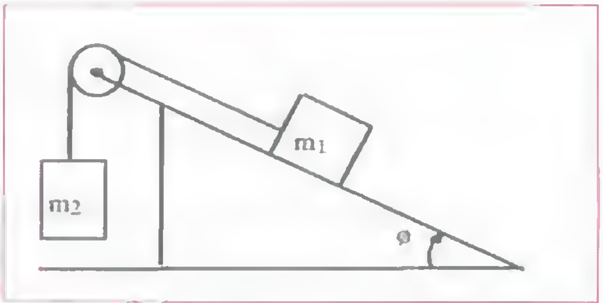


Figura. L-7-4

a) Haz un diagrama del cuerpo libre para el cuerpo de masa m_2, indicando todas las fuerzas que actúan.

b) Haz un diagrama del cuerpo libre para el cuerpo de masa m_1, indicando todas las fuerzas que actúan.

c) Plantea la ecuación del movimiento para el cuerpo de masa m_1

d) Plantea la ecuación del movimiento para el cuerpo de masa m_2.

e) Encuentra una ecuación para la aceleración del sistema.

f) Encuentra una ecuación para la tensión del hilo.

g) Suponiendo que consideramos el roce, ¿cómo escribirías la ecuación del movimiento para el cuerpo de masa m_1?.

7. Dos cuerpos de masas $m_1 = 30$ gr y $m_2 = 40$ gr se atan en los extremos de una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea, figura L-7-5.

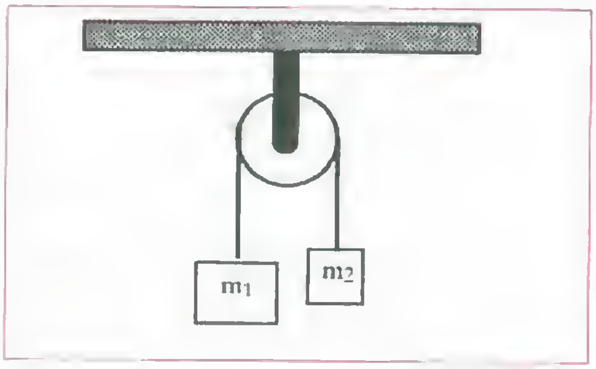


Figura. L-7-5

Calcular:

a) La aceleración del sistema.

b) La tensión de la cuerda.

R: a) 0,14 m/s² b) 0,2982 N

8. Un bloque de 5 Kg se sitúa sobre una superficie lisa. De una cuerda horizontal, unida al bloque que pasa por una polea sin rozamiento, cuelga un cuerpo de 4 Kg. Hallar la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda cuando se suelta el bloque de 4 Kg (figura L-7-6).

R: 4,35 m/s² y 21,8 N

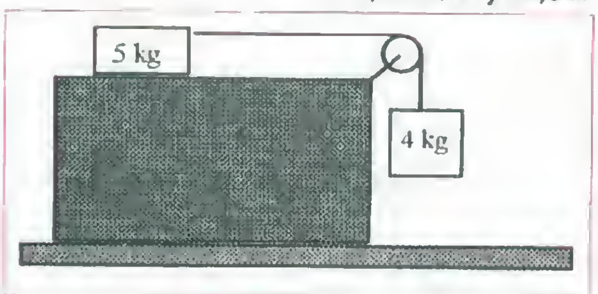


Figura L-7-6

9. Por la garganta de una polea que gira sin rozamiento, alrededor de su eje horizontal pasa un hilo de masa despreciable, cuyos extremos sostiene dos pesos $P_1 = 539$ pondios y $P_2 = 441$ pondios. Despreciando la masa de la polea, calcular:

a) La aceleración del sistema.

b) La tensión de la cuerda.

R: a) 0,98 m/s² b) 4,75 N

10. Un bloque de 30 Kg descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 20 con la horizontal. Una fuerza de 15 Kp, paralela al plano, tira del bloque hacia arriba. ¿Cuál es su aceleración del movimiento?. ¿Qué fuerza ejerce el plano sobre el bloque?.

R: 1,5 m/s² y 276,27 N

11. Un cuerpo de $m_1 = 50$ Kg se encuentra sobre un plano inclinado de 45° con relación a la horizontal y está unido por una cuerda que pasa por la garganta de una polea a otro cuerpo $m_2 = 60$ Kg que cuelga. Calcular la aceleración y la tensión de la cuerda, despreciando el roce. Ver figura L-7-7

R: 2,2 m/s² y 456,48 N

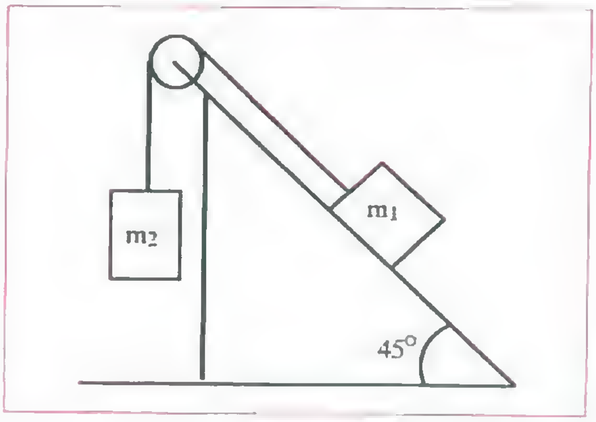


Figura L.7.7

LABORATORIO 8

FUERZA DE ROCE Y COEFICIENTE DE ROCE

A. Pre-Laboratorio

El rozamiento es una fuerza que sólo se pone de manifiesto cuando existe un movimiento de un cuerpo sobre una superficie. Esta fuerza siempre posee la dirección del movimiento, pero en sentido opuesto.

En esta práctica haremos un estudio sobre los coeficientes de roce. Para ello debemos estar provistos de un conjunto de conocimientos previos que debemos investigar y responder.

Investiga en la parte teórica del texto y anótalo en tu cuaderno:

- ¿Cuántas clases de rozamiento existen y cuáles son?.
- ¿Cuál es la ecuación que rige a cada tipo de roce?.
- ¿De qué factores depende la fuerza de roce?.
- Investiga y redacta en tu cuaderno en qué casos el roce es beneficioso y en qué casos es perjudicial.
- ¿Influye la normal sobre la fuerza de roce?. Explica.
- Haz un diagrama donde se muestre un bloque sobre un plano inclinado, un ángulo θ. Dibuja todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
- Partiendo del diagrama anterior demuestra que $F_r = mg \operatorname{sen} \theta$.
- Construye con dos tablas o cualquier otro material y bisagras un plano inclinado cuya pendiente puedas variar a voluntad.

B. Laboratorio

Materiales

- Dinamómetros
- Plano inclinado construido por el alumno.
- Tacos de madera en forma de cubos o paralelepípedos provistos de un gancho en un extremo con el objeto de insertar el dinamómetro

Experiencia 1

- Coloca sobre una superficie horizontal (mesa del laboratorio), un bloque de madera provisto de un gancho. A través de un dinamómetro hala con una débil fuerza. ¿Se mueve el bloque?.
- Aumenta gradualmente esta fuerza y observa cuánto marca el dinamómetro en el momento en que inicia el bloque el movimiento.
- Redacta con tus propias palabras lo que has observado.
- Usa el dinamómetro y con él determina el peso del cuerpo. Este peso es igual a la normal.
- Usa la ecuación de la fuerza de roce y determina el coeficiente de roce estático.

Experiencia 2

- Repite la experiencia anterior con las dos primeras actividades y mantén el movimiento del bloque con el dinamómetro, de tal manera que sea casi uniforme. ¿Marca el

dinamómetro el mismo valor?. ¿Cómo es ese valor con respecto al valor anterior?.

- Usa la ecuación de la fuerza de roce y determina el coeficiente de roce dinámico.
- Compara los valores de los coeficientes de roce estático y dinámico. ¿Son iguales?. ¿Por qué?.

Experiencia 3

Usemos ahora el plano inclinado que has construido, pero colocado de tal manera que el ángulo entre las tablas sea cero, es decir, cerrado completamente.

* Coloca un bloque sobre el plano y comienza a levantar lentamente el plano hasta llegar el momento en que en el bloque comience a deslizar. En este momento mide el ángulo que se forma entre el plano horizontal y el inclinado.

- Como ya conocemos el peso del bloque y el ángulo, haz un diagrama de las fuerzas que actúan sobre el bloque.
- Usa la primera ley de Newton y calcula el coeficiente de roce cinético.
- Calcula el valor de la tangente del ángulo y compáralo con el coeficiente de roce cinético. ¿Son iguales?.
- ¿Qué puedes concluir?.

C. Post.Laboratorio

1. ¿Por qué surgen las fuerzas de rozamiento?.

2. ¿Qué es necesario hacer para que se manifieste la fuerza de rozamiento sobre una mesa en una habitación?.

3. ¿Qué clase de magnitudes son el roce y el coeficiente de roce?. ¿En qué unidades se expresan?.

4. Para calcular el coeficiente de rozamiento se han utilizado, en una primera experiencia, tres pesas de 50 gr como sobrecarga a la masa arrastrada; en un segundo ensayo han sido cuatro las pesas utilizadas. ¿Cuál de los coeficientes de rozamiento ha sido mayor?.

5. ¿Por qué las ruedas de un automóvil patinan cuando se mueven sobre un terreno con barro?.

6. Se desea trasladar, arrastrándolo por un plano horizontal, un cuerpo de 110 Kg. Si el coeficiente de rozamiento es 0,3. ¿Qué fuerza es necesario aplicar para desplazarlo con aceleración de 1,2 m/s^2?.

En caso de subirlo por un plano que forma un ángulo de 30^0 con la horizontal, ¿qué fuerza es necesario aplicar si se mantiene el coeficiente de roce y la aceleración?.

R: 455,4 N y 841 N

7. Consideremos un bloque de masa 50 Kg que se desplaza sin fricción por la acción de una fuerza F = 20 N. Supóngase que este experimento se realiza en la luna, donde g = 1,6 m/s^2 y en la tierra g = 9,8 m/s^2. Entre las afirmaciones siguientes, diga las correctas:

a) En la tierra, el bloque al deslizar adquiere una aceleración de 4 m/s^2.

b) La masa del bloque en la luna es de 0,5 Kg.

c) En la luna el bloque al ser impulsado adquiere una aceleración de 4 m/s^2.

d) El peso del bloque en la tierra es 5 N.

e) El peso del bloque en la luna es 0,8 N.

8. Partamos del mismo problema anterior y supongamos que el coeficiente de fricción en la tierra es de 1 N. ¿Cuáles afirmaciones son correctas?.

a) En la tierra el bloque al ser impulsado sobre la mesa adquiere una aceleración de 2 m/s^2.

b) El coeficiente de fricción cinética tiene el mismo valor en la tierra y en la luna.

c) En la luna, el valor de la reacción normal de la masa sobre el bloque es menor en la tierra.

d) En la luna el bloque al ser impulsado sobre la mesa adquiere una aceleración mayor que 2 m/s^2.

LABORATORIO 9

LEY DE HOOKE. DETERMINACIÓN DEL PERÍODO DE OSCILACIÓN DE UN PÉNDULO DE RESORTE.

A. Pre- Laboratorio

En todos los cuerpos sólidos existen fuerzas contrarias de atracción y repulsión, pero entre las propiedades más importantes de los materiales están sus características elásticas. Si un cuerpo, después de ser deformado por una fuerza, vuelve a su forma o tamaño original cuando deja de actuar la fuerza deformada, se dice que es un cuerpo elástico. Todas las sustancias son elásticas en algún grado.

Robert Hooke, físico matemático, químico y astrónomo inglés (1635-1703), inventó el barómetro de cuadrante, el resorte espiral de los relojes y otros varios aparatos. Enunció diversas teorías y formuló la ley que lleva su nombre relativa a la elasticidad de un cuerpo. En el estudio de los efectos producidos, por las fuerzas de tensión, observó que había un aumento de la longitud del cuerpo que era proporcional a la fuerza aplicada. Esta observación puede universalizarse diciendo que **la deformación es proporcional a la fuerza deformadora**, expresión que se conoce con el nombre de la ley de Hooke.

Si la fuerza deformadora sobrepasa un cierto valor, el cuerpo no volverá a su tamaño o forma original después de suprimir dicha fuerza. Entonces se dice que ha adquirido una **deformación permanente**. La fuerza más pequeña que produce una deformación permanente se llama **límite de elasticidad.**

Se entiende por límite de elasticidad a la máxima longitud que puede alargarse un cuerpo elástico sin que pierda sus características originales.

Para fuerzas deformadoras que sobrepasan el límite de elasticidad no es aplicable la ley de Hooke.

Esta ley puede ser expresada matemáticamente así:

$$F = -k.x$$

siendo:

F : la fuerza aplicada

k : la constante de elasticidad

x : el alargamiento

El signo (-) en la ecuación se debe a la fuerza restauradora que tiene sentido contrario al desplazamiento.

Investiga en la parte teórica del texto, en lo referente al movimiento armónico simple, los siguientes aspectos:

- ¿Qué es un movimiento armónico simple?.
- ¿Cuáles son los elementos de un movimiento armónico simple?. Define cada uno de ellos.
- ¿Cuándo actúa la fuerza recuperadora y cuándo la fuerza deformadora?.
- Escribe la ecuación para calcular el período de un resorte al oscilar. De dicha ecuación trata de despejar: a) primero, k ; b) luego, m.

B. Laboratorio

Materiales:

* Soporte universal.
* Regla graduada
* Puntilla de agua.
* Resortes
* Juego de masas patrones.
* Cronómetro.

Experiencia 1

- Coloca un cuerpo elástico (banda de goma o resorte) suspendido paralelo a una regla graduada como iudica la figura L-9-1

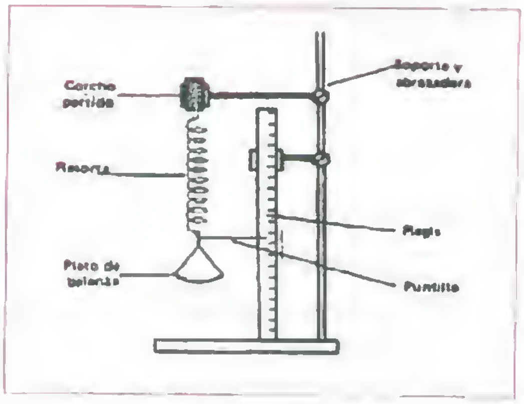


Figura L-9-1

- Mide la posición inicial y anótala en tu cuaderno.
- Coloca gradualmente pesas en la porta pesas, como te lo indica el profesor y determina en cada caso la longitud que se alarga el resorte. Estas pesas se van colocando hasta que la longitud varíe.
- Copia en tu cuaderno el siguiente cuadro y llénalo:

F (fuerza)	x (alargamiento)	k = F/x

- En una hoja de papel milimetrado, construye la gráfica de F, en función de X, es decir, el eje de las abscisas para los valores de x, y el de las ordenadas para los valores de F.
- ¿Cómo es la gráfica obtenida?. Calcula la pendiente de la recta. ¿Qué significa este valor?.

Experiencia 2

Aquí calcularemos el período de oscilación de un resorte:

- Usa el mismo resorte anterior al cual le has calculado la constante de la elasticidad k.
- Fija el resorte al soporte universal y cuelga de su extremo inferior una masa de 0,1 Kg, por ejemplo (puedes usar las que tengas a disposición).
- Determina el período de las oscilaciones del péndulo de resorte con la masa de 0,1 Kg y una elongación inicial de 2 cm. Con esta finalidad determina el tiempo que necesita el péndulo para realizar n = 10 ó 20 oscilaciones completas. El periodo lo calculamos a través de la fórmula T = t/n (recuerda que debes estirarlo y dejarlo oscilar).
- Repite el experimento para una masa de 0,4 Kg.
- Calcula en forma teórica, usando la fórmula del período para dos masas anteriores (0,1 Kg y 0,4 Kg).
- Compara los resultados obtenidos con los resultados experimentales.

Experiencia 3

- Cuelga ahora un resorte de constante de elasticidad desconocida.
- Cuelga en su parte inferior una masa "m" conocida. Estíralo y suéltalo para que realice unas 40 oscilaciones. Este tiempo será medido por un cronómetro.
- Calcula el período de oscilación a través de la expresión T = t/n.
- Despeja k de la expresión

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

y calcula su valor.

- Repite este proceso para varias masas y calcula el promedio.

C. Post-Laboratorio

1. Una persona estira vigorosamente un resorte de constante de elasticidad 200 N/m, desde su longitud inicial sin deformación de 50 cm hasta que su longitud final sea de 60 cm.

a) ¿Cuál es el valor de la fuerza que el resorte ejerce sobre la persona cuando alcanza la longitud de 60 cm?.

b) A medida que el resorte se va estirando, la fuerza que él ejerce sobre la persona, ¿aumenta o permanece constante?.

2. Una misma fuerza actúa sucesivamente sobre dos resortes diferentes A y B, observándose que la deformación X_a es mayor que la deformación X_b.

a) ¿Podemos decir que el resorte A es más blando o más duro que B?.

b) ¿La constante elástica de A es mayor o menor que la constante elástica de B?.

c) ¿Quiere decir esto que los resortes de constantes de valor elevado son más duros o más blandos?.

3. Un cuerpo se encuentra en el extremo de un resorte que tiene una deformación x. Si se aumenta la deformación del resorte a un valor 2x:

a) El valor de su constante elástica, ¿aumenta, disminuye o no varía?.

b) ¿Cuántas veces mayor se vuelve la fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo?.

4. Si tenemos dos resortes diferentes y los queremos comprimir una misma longitud, se aplican fuerzas de 2 Kp y 1,6 Kp respectivamente. ¿Qué relación existe entre sus constantes de elasticidad?.

R: 1,25

5. ¿Qué se entiende por límite de elasticidad?.

6. ¿Cuál es la fuerza opuesta a la deformadora?.

7. En el instante en que cesa la fuerza deformadora, ¿cesa también la recuperadora?. Explica lo que ocurre en ese instante.

8. ¿Cuál es la condicional de la ley de Hooke?.

9. ¿Cómo varía el periodo de un resorte si varía la masa?.

10. ¿Cómo varía el período si varía la constante k?.

LABORATORIO 10

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

A. Pre-Laboratorio

Esta práctica tiene como objetivo la comprobación experimental de la ley de la conservación de la energía.

Conservación de la energía mecánica

Hemos demostrado en la parte teórica de este texto, que la energía pasa de una forma a otra, pero su cantidad no varía en dichas transformaciones. Esto nos condujo a enunciar el **principio de conservación de la energía**, el cual dice así:

"La cantidad de energía de un sistema aislado, es decir, que no intercambia energía con el exterior, no puede variar".

Dicho de otra forma:

La energía no se crea ni se destruye sólo se transforma.

De acuerdo con nuestro estudio, nos interesa muy especialmente el principio de conservación de la energía en las transformaciones mecánicas, por lo que debe ser formulado de modo que las energías cinética y potencial aparezcan explícitamente. De esta manera, podemos escribir que **la energía mecánica total de un sistema es la suma de su energía cinética y potencial,** quedándonos la expresión:

$$E_m = E_p = E_c$$

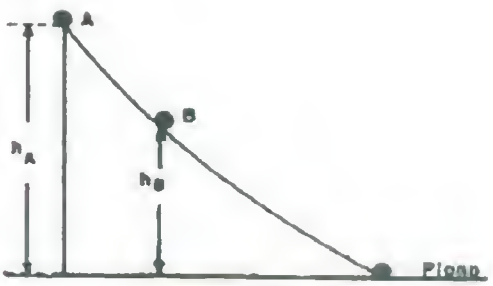


Figura L-10-1

Consideremos la figura L-10-1. la cual representa una rampa acanalada, por la cual se desliza una esfera desde la posición de reposo A hasta la posición de movimiento B, situadas ambas posiciones a alturas h_A y h_B del plano de referencia.

El trabajo realizado por las fuerzas conservativas es:

$$W_{AB} = E_{PA} - E_{PB} \quad \text{.................................} (1)$$

Este trabajo está relacionado con la variación de la energía cinética de la manera siguiente:

$$W_{AB} = E_{cB} - E_{cA} \quad \text{..................................} (2)$$

Igualando (1) y (2), de acuerdo con el teorema del trabajo y de la energía cinética, se tendrá que:

$$E_{PA} - E_{PB} = E_{cB} - E_{cA}$$

Esta expresión puede escribirse también así:

$$\boxed{E_{PA} + E_{cA} = E_{PB} + E_{cB}}$$

Vista de esta manera, podemos enunciarla así:

Bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de las energías potencial y cinética en el punto A es igual a la suma de estas energías en el punto B.

Dicho de otra manera:

La energía mecánica en A es igual a la energía mecánica en B.

Ejemplo:

Consideremos un cuerpo de masa m = 0,2 Kg que se desliza a lo largo de un plano, como lo indica la figura L-10-2.

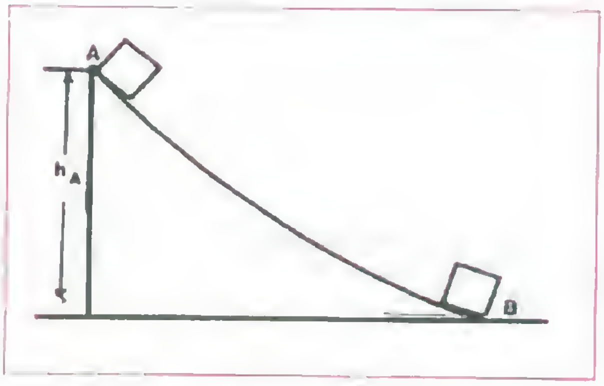


Figura L-10-2

El cuerpo parte del reposo desde el punto A situado a 8 m del plano de referencia y llega al punto B con una velocidad de 12 m/s. ¿Cuánto vale la energía mecánica en B?.

Solución

Datos:

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 0.2\ Kg \\ h = 8\ m \\ h_B = 0\ m \\ V_A = 0\ m/s \\ V_B = 12\ m/s \end{array}}$$

Cálculo de energía mecánica en A

La energía mecánica en el punto A viene dada por:

$$E_{mA} = E_{PA} + E_{cA}$$

Sustituyendo E_{PA} y E_{cA} por sus respectivas ecuaciones, se tendrá que:

$$E_{mA} = mgh_A + \frac{1}{2}\ m(V_A)^2$$

Como el cuerpo está en reposo en la posición A, se tendrá que $V_A = 0$ y por lo tanto.

$$\frac{1}{2}\ m(V_A)^2 = 0$$

quedándonos que:

$$E_{mA} = mgh_A$$

Sustituyendo a: "m", "g" y "h_A" por sus valores, tenemos que:

$$E_{mA} = 0{,}2Kg.9{,}8\frac{m}{s^2}.\ 8\ m$$

$$\boxed{E_{mA} = 15{,}7\ Joules}$$

Cálculo de energía mecánica en B

La energía mecánica en el punto B viene dada por la ecuación:

$$E_{mB} = E_{cB} + E_{PB} \qquad \text{pero}$$

$$E_{mB} = \frac{1}{2}\ m(V_B)^2 + mgh_B$$

Como el cuerpo en la posición B está al nivel del plano de referencia, se tendrá $h_B = 0$ y $mgh_B = 0$ quedándonos que:

$$E_{mB} = \frac{1}{2}\ m(V_B)^2$$

Sustituyendo m y V_0 por sus valores, se tendrá que:

$$E_{mB} = \frac{1}{2}.\ 0{,}2Kg.144\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$\boxed{E_{mB} = 14{,}4\ Joules}$$

Como puede notarse, la energía mecánica no se conservó, lo cual supuestamente nos llevaría a la conclusión de que no se cumple la conservación de la energía mecánica. El valor inicial 15,7 Joules ha pasado al valor final 14,4 Joules. Esta diferencia se debe a una **fuerza disipativa** (el roce), actuando sobre el bloque y transformando la energía mecánica en calor. Si se lograra medir la cantidad de calor que aparece tanto en el cuerpo como en la superficie, encontraríamos que representa una cantidad de energía equivalente a la energía mecánica que el cuerpo perdió. Esto nos permite confirmar, una vez más, el cambio de una forma de energía en otra.

Cálculo del tiempo de vuelo t_v y la velocidad de la esferita al salir de la rampa.

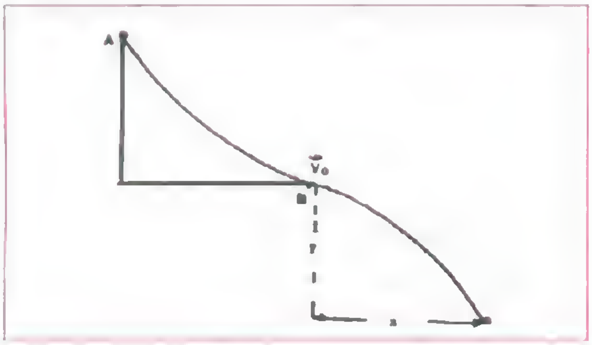


Figura. L-10-3

Es posible conocer la velocidad inicial de la esferita V_0 en el momento de salir de la rampa de lanzamiento en el punto B. Para ello debes medir "x" y "y". Una vez conocida "y" usamos la expresión:

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$ y despejando t, obtenemos que:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Una vez obtenido este tiempo lo reemplazamos en la ecuación del desplazamiento horizontal.

$$x = V_0 . t$$

Despejando V_0, se obtiene que:

$$V_0 = \frac{x}{t}$$

Esta última expresión nos da la velocidad de la esferita en el punto B. Nótese que la velocidad de la esferita en B será diferente si la dejamos rodar desde puntos intermedios entre A y B.

B.Laboratorio

Materiales

- La rampa acanalada que usaste en el lanzamiento vertical.
- Esferita de metal.

- Papel blanco.
- Papel carbón.
- Cinta métrica o regla graduada.

Experiencia 1

Medición de la velocidad de la esferita al final de la rampa, cuando se deja caer desde dos puntos diferentes.

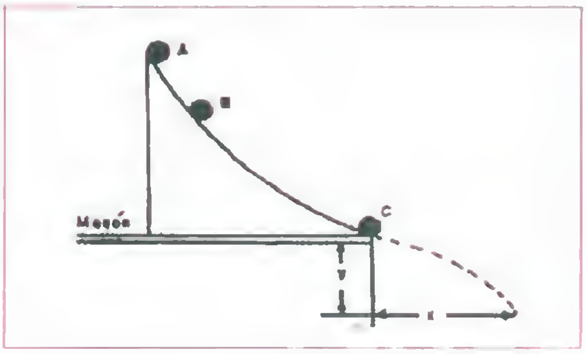


Figura L-10-4

- Coloca en el piso papel blanco y después papel carbón y fíjalos con tirro. Esto se hace con el objeto de marcar los impactos de la esferita en el suelo.
- Mide la altura desde el suelo hasta el borde de la rampa, la cual llamarás "y".
- Deja rodar la esferita desde la posición A y mide la distancia horizontal desde el punto del impacto con el suelo, hasta el punto situado verticalmente debajo del borde de la rampa. Esta distancia la llamarás "x".
- Deja rodar ahora la esferita desde el punto B y calcula por el mismo procedimiento la velocidad de la esferita en C.

Experiencia 2

Comprobación de la conservación de la energía mecánica.

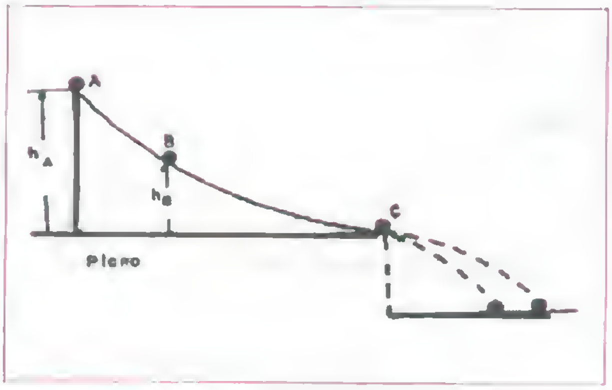


Figura. L-10-5

- Determina la masa de la esferita.
- Elige los puntos A y B desde donde dejaste caer la esferita para buscar la velocidad en C en la experiencia anterior.
- Mide con una regla o una cinta métrica las alturas h_A y h_B con respecto al plano de la mesa.
- Calcula la energía potencial en el punto A.
- ¿Cuánto vale la energía cinética en el punto A?. Explica.
- Calcula la energía mecánica en el punto A.
- Calcula la energía mecánica de la esferita en el punto C.
- Compara este último valor con el valor de la energía mecánica en el punto A. ¿Qué observas?. Si existe alguna diferencia, ¿podrías explicar a qué se debe?.
- Haciendo uso de la conservación de la energía y con los datos que tienes, calcula la velocidad de la esferita en el punto B.

C. Post-Laboratorio

1. En la figura L-10-6 que se muestra, se tiene una partícula de masa 2 Kg, la cual se desliza sobre una superficie curva. Si se usa el punto C como el nivel de referencia para la medición de la energía potencial, calcular para cada uno de los puntos A, B, C y D los valores de las siguientes magnitudes:

a) La energía mecánica total

b) La energía cinética.

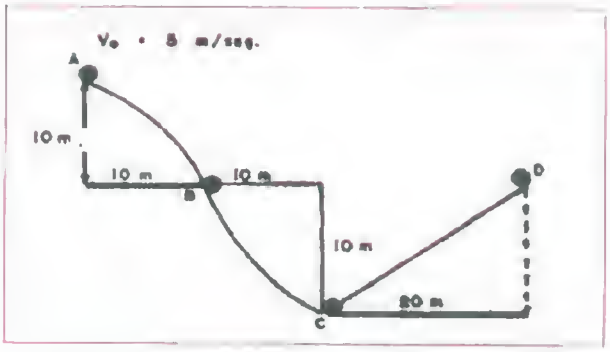


Figura. L-10-6

R: 417 Joules; 25 Joules; 221,12Joules.

2. Se tiene la figura L-10-7, en la cual $h_A = 4m$ y $h_c = h_A/2$

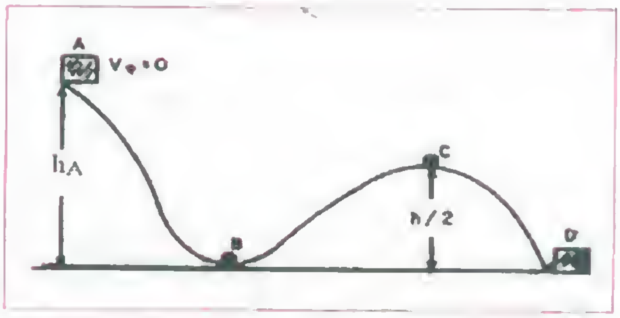


Figura L-10-7

a) ¿Cuánto vale la velocidad en B?.

b) ¿Cuánto vale la velocidad C?

c) ¿Cuánto vale la energia potencial en C si $m = 0,2$ Kg?.

d) ¿Qué velocidad tendrá en la posición D?.

R: a) 8,85 m/s; b) 6,25 m/s

c) 3,93 Joules; d) 8,85 m/s

3. Un proyectil de 5 Kg se dispara verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 40 m/s. Determinar su energía cinética y potencial:

a) En el momento del disparo

b) 2 s más tarde.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, Fernando. **Problemas de Física**. Editorial Alhambra. Madrid, 1969.

Alvarenga y Máximo. **Física General**. Editorial HARLA. Brasil, 1983.

Armiño-Moliner. **Física y Química**. Editorial Edelvives. Zaragoza, 1976.

Bueche, Frederick. **Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería**. Tomos I y II. Editorial Mc Graw-Hill. México, 1972.

Casas-Muñoz-Quiroga. **Física**. Tomo 2. Editorial Norma. Colombia, 1974.

García-Tabio-Núñez. **Física 10 Grado**. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1985.

Gintel-Rojo. **Curso de Física Básica**. Mc Graw Hill. México 1977.

Goldemberg. **Física General y Experimental**. Editorial Interamericana. México 1972.

Lasheras, Pilar. **Física y Química 2 Curso**. Editorial Vecens- Vives. España, 1994.

Murphy-Smoot. **Física** Compañía Editorial Continental. México, 1981.

Pinzón, Alvaro. **Física I**. Editorial HARLA. México, 1977

Quiroga, Jorge. **Física. 5 Curso.** Editorial Bedout. Medellín, 1975.

Riveros, Héctor. **Física 7**. Editorial Limusa. México, 1980

Segura-Rodríguez. **Fundamentos de Física I**. Editorial Mc Graw Hill. México, 1980.

Sierra-Fiallo. **Física. 4 Curso.** Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 1982.

Tipler, Paúl. **Física.** Tomo I y II. Editorial Reverté, S:A:. Barcelona, 1976.

Villegas-Ramírez. **Investiguemos 10. Física.** Editorial Voluntad. Bogotá, 1989.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

UNIDAD DE NIVELACION

UNIDAD I

UNIDAD II

UNIDAD III

LAS INTERACCIONES

UNIDAD IV

LA ENERGÍA Y SUS FORMAS DE TRANSFERENCIA

ÍNDICE DE LABORATORIOS

GLOSARIOS

UNIDAD I.

Fórmulas y símbolos: son relaciones matemáticas que representan las magnitudes y factores que intervienen en el estudio de un fenómeno físico.

Hipótesis física: es un conjunto de suposiciones que tratan de explicar la naturaleza de los fenómenos físicos.

Kilogramo: es la masa de un cilindro de platino e iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sevres en Francia.

Ley Física: es la forma de expresar científicamente una relación entre las diferentes variables que intervienen en un fenómeno.

Medición: Técnica a través de la cual se le asigna un número a una propiedad física como resultado de comparar dicha propiedad con otra similar seleccionada como patrón, la cual ha sido adoptada como unidad.

Magnitud: es toda aquella propiedad que puede ser medida.

Magnitudes derivadas: son aquellas que provienen de la combinación de las magnitudes fundamentales.

Magnitudes directamente proporcionales: dos magnitudes "Y" "X" son directamente proporcionales, cuando su representación gráfica es una recta que pasa por el origen y la relación entre dichas magnitudes es una constante, llamada constante de proporcionalidad.

Magnitudes inversamente proporcionales: dos magnitudes "Y" y "X" se dice que son inversamente proporcionales cuando "Y" y "X" varían de tal forma que el producto entre dichas magnitudes es constante.

Magnitudes fundamentales: son aquellas que no provienen de otras magnitudes.

Medición: es un proceso que consiste en comparar un patrón seleccionado, con el objeto cuya magnitud se desea medir, para conocer cuántas veces el patrón está contenido en esa magnitud.

Metro: es la distancia recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299792458 s.

Notación científica: es la forma abreviada de escribir un número como producto de un número comprendido entre 1 y 10, por una potencia de base diez.

Orden de magnitud: es la potencia de base diez más próxima a dicho número.

Radián: es el ángulo cuya longitud de arco es igual al radio.

Teoría: es una hipótesis amplia que abarca un conjunto de fenómenos.

Segundo: es la duración de 9.192.631770 periodos de cierta transición del átomo de cesio 133.

Sistema de unidades: es un conjunto de unidades, formado, tomándose una unidad de cada magnitud.

Unidad: es una cantidad arbitraria a la cual se le asigna le valor 1.

UNIDAD II.

Aceleración centrípeta: es la aceleración que se produce en el M.C.U. como consecuencia de la variación de dirección que experimenta el vector velocidad lineal.

Aceleración instantánea: es la razón de la variación de la velocidad y el intervalo de tiempo cuando éste tiende a cero.

Amplitud: es la máxima elongación.

Balística: es la ciencia encargada de hacer el estudio del movimiento de los proyectiles.

Caída libre: es el movimiento en dirección vertical con aceleración constante realizado por un cuerpo cuando se deja caer en el vacío.

Desplazamiento máximo: es el desplazamiento alcanzado por un móvil durante el tiempo máximo.

Elongación: es el desplazamiento de la partícula desde la posición de equilibrio hasta cualquier posición en un instante dado.

Frecuencia: es el número de vueltas que da el móvil en la unidad de tiempo.

Movimiento armónico simple: es un movimiento periódico en ausencia de rozamiento producido por la acción de una fuerza recuperadora que es directamente proporcional al desplazamiento y aplicada en la misma dirección pero de sentido opuesto.

Movimiento circular: es el que tiene por trayectoria una circunferencia.

Movimiento circular uniforme: es aquel en el cual la partícula en su trayectoria recorre arcos iguales en intervalos de tiempo iguales.

Movimiento de rotación: un cuerpo está dotado de movimiento de rotación pura cuando todos sus puntos describen circunferencias que tienen su centro una misma recta fija llamada eje de rotación.

Movimiento de traslación: un cuerpo tiene movimiento de traslación cuando todas sus partes se mueven idénticamente o cuando un segmento de él se mantiene paralelo a sí mismo durante todo el movimiento.

Movimiento periódico: es el que se repite a intervalos de tiempos iguales.

Movimiento rectilíneo uniforme: es cuando una partícula se desplaza con velocidad constante a lo largo de una trayectoria rectilínea.

Movimiento rectilíneo uniformemente variado: es cuando la rapidez del móvil experimenta variaciones iguales en intervalos de tiempos iguales.

Oscilación completa: es el movimiento realizado desde cualquier posición hasta regresar de nuevo a ella pasando por las posiciones intermedias.

Péndulo simple: es aquel que consta de masa "m" suspendido de un hilo de longitud "l"

Período: es el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta completa.

Posición de equilibrio: es la posición en la cual no actúa ninguna fuerza neta sobre la partícula oscilante.

Principio de independencia de los movimientos: si un cuerpo tiene un movimiento compuesto, cada uno de los movimientos componentes se cumplen como si los demás no existieran.

Proyectil: es un objeto al cual se le a comunicado una velocidad inicial y se ha dejado en libertad para que realice un movimiento bajo la acción de la gravedad.

Radio: segmento de recta que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella.

Rapidez media: es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo empleado.

Sistema de referencia: es el punto considerado fijo, cuya ubicación se conoce con exactitud y a partir del cual un cuerpo cambia de posición.

Tiempo máximo: es el tiempo transcurrido desde el momento en que un móvil inicia un movimiento uniformemente retardado, hasta detenerse.

Trayectoria: es el conjunto de posiciones sucesivas ocupadas en el transcurso del tiempo por la partícula móvil durante su desplazamiento.

Vector desplazamiento: es un vector dirigido desde la posición inicial a la posición final.

Vector posición: es el vector que une el origen del sistema de coordenadas con el punto donde está ubicado el objeto a estudiar.

Velocidad angular: es el ángulo barrido en la unidad de tiempo.

Velocidad instantánea: es la pendiente de la tangente a la curva en el punto considerado.

Velocidad lineal: es el arco recorrido en la unidad de tiempo.

UNIDAD III

Cantidad de movimiento lineal: es una magnitud vectorial medida por el producto de la masa de un cuerpo y la velocidad que adquiere.

Centro de masa: es el punto donde debe aplicarse una fuerza no equilibrada para que dicho cuerpo realice un movimiento de traslación sin rotación.

Colisiones elásticas: son aquellas en los cuales se conserva la energía cinética y la cantidad de movimiento.

Colisiones inelástica: son aquellas en las cuales se conserva la cantidad de movimiento pero no la energía cinética.

Choque o colisión: es un fenómeno de interacción intensa entre dos o más cuerpos, en que al menos uno de ellos está en movimiento en un intervalo de tiempo muy corto.

Choque frontal: ocurre cuando las partículas que colisionan se mueven a lo largo de una misma recta, antes y después de la interacción.

Diagrama de cuerpo libre: es un diagrama donde se representan a través de vectores todas y cada una de las fuerzas que actúan sobre él.

Dina: es la fuerza que aplicada a la masa de un gramo, le produce una aceleración de un centímetro sobre segundo cuadrado.

Fuerza de adhesión: es la fuerza que mantiene unidas a las moléculas de cuerpos diferentes.

Fuerzas de cohesión: es la fuerza que mantiene unidas a las moléculas de un mismo cuerpo.

Fuerzas elásticas: es la propiedad que poseen los cuerpos de recuperar su forma original una vez deformados por efecto de una fuerza externa.

Fuerza Normal: es la fuerza perpendicular que la superficie soporte ejerce sobre la superficie que se encuentra sobre ella.

Fuerza de roce o fricción: son fuerzas que se originan en la superficie de contacto entre dos cuerpos.

Fuerza de tensión: es la fuerza ejercida por una cuerda, considerada de masa despreciable e inextensible, sobre un cuerpo que está ligada a ella.

Interacciones: son las influencias o acciones mutuas que ejercen los cuerpos entre sí.

Interacciones nucleares: son aquellas que aparecen únicamente en el interior del núcleo del átomo.

Impulso de una fuerza: es un vector cuyo módulo es igual al producto del módulo de la fuerza aplicada a un cuerpo por el intervalo de tiempo que actúa y cuya dirección y sentido coincide con la dirección y sentido de la fuerza.

Kilopondio: es la fuerza aplicada a la unidad técnica de masa le produce la aceleración de la gravedad 9,8 m/s.

Masa gravitatoria: es la masa medida en función de la fuerza que ejerce sobre ella el campo gravitacional.

Newton: es la fuerza que aplicada a la masa de un kilogramo, le produce una aceleración de un metro sobre segundo cuadrado.

Peso de un cuerpo: es la fuerza con que él es atraído por la tierra.

Sistema aislado: es el sistema constituido por dos o más cuerpos donde las únicas fuerzas que actúan sobre ellos son sus interacciones mutuas.

UNIDAD IV.

Energía: es una propiedad o tributo de los cuerpos o sistemas materiales en virtud de la cual éstos son capaces de transformarse, modificando su condición o estado, así como actuar sobre otros, originando en ellos procesos de transformación.

Energía cinética: es la capacidad que tienen los cuerpos de realizar un trabajo en virtud de su movimiento.

Energía mecánica: es la capacidad que tienen los cuerpos o los sistemas para realizar un trabajo.

Ergio: es el trabajo realizado por la fuerza de una dina cuando el cuerpo al cual está aplicada se desplaza un centímetro en su misma dirección y sentido.

Fuerza conservativa: es aquella que aplicada a un cuerpo realiza un trabajo nulo si la trayectoria es cerrada.

Joule: es el trabajo realizado por la fuerza de un Newton cuando el cuerpo al cual esta aplicada se desplaza un metro en su misma dirección y sentido.

Kilopondímetro o kilográmetro: es el trabajo realizado por la fuerza de un Kilopondio cuando el cuerpo al cual está aplicada se desplaza un metro en su misma dirección y sentido.

Kilovatio hora: es el trabajo realizado cuando se desarrolla la potencia de un kilovatio en una hora.

Potencia mecánica: es el trabajo mecánico realizado en cada unidad de tiempo.

Trabajo: el trabajo realizado por una fuerza constante es la magnitud medida por el producto escalar de la fuerza aplicada y el desplazamiento que ha experimentado el punto de aplicación de esa fuerza.

Watio: es la potencia desarrollada cuando se realiza el trabajo de un Joule en cada segundo.

RESUMEN DE FÓRMULAS

UNIDAD II.
ESTUDIO DEL MOVIMIENTO

MOVIMIENTO RECTILÍNEO HORIZONTAL.

-Ecuaciones de la velocidad:
En función del tiempo
$$V = Vo + at$$
En función de distancia y aceleración
$$V^2 = Vo^2 + 2ax$$
-Ecuación de la distancia en función de la aceleración y el tiempo.
$$X = Vo.t + \frac{at^2}{2}$$
Si parte del reposo $V_o = 0$
$$X = \frac{1}{2} a t^2$$
-Ecuación del desplazamiento máximo
$$X_{máx} = -\frac{Vo^2}{2a}$$
-Ecuación del tiempo máximo
$$t_{máx} = -\frac{Vo}{a}$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO VERTICAL

-Ecuación de la altura vertical
$$Y = Vo.t + \frac{1}{2} gt^2$$
-Ecuación de la velocidad vertical en el tiempo t
$$V = Vo + gt$$
-Ecuación de la velocidad vertical a la altura Y
$$V^2 = Vo^2 + 2gY$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

(1)CUERPO LANZADO HORIZONTALMENTE

-Componente horizontal de la velocidad
$$V_o = V_x$$
-Componente vertical de la velocidad en el tiempo t
$$V_y = gt$$
-Magnitud de la velocidad en el tiempo t
$$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2$$
-Dirección de la velocidad
$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$$
-Desplazamiento horizontal en el tiempo t
$$x = V_o.t$$
-Desplazamiento vertical en el tiempo t
$$y = \frac{1}{2} gt^2$$
-Módulo del desplazamiento en el tiempo t
$$d^2 = x^2 + y^2$$
-Dirección del desplazamiento
$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$
-Tiempo de vuelo
$$t_v = \sqrt{-\frac{2Y}{g}}$$

(2) LANZAMIENTO INCLINADO

-Ecuaciones de la velocidad en el momento del lanzamiento
Componente horizontal
$$V_{ox} = V_o \cdot \cos\theta$$
Componente vertical
$$V_{oy} = V_o \cdot \operatorname{sen}\theta$$
-Componente horizontal de la velocidad en el tiempo t
$$V_x = V_{ox} = V_o \cdot \cos\theta$$
-Componente vertical de la velocidad en el tiempo t
$$V_y = V_{oy} + gt$$
-Magnitud de la velocidad en el tiempo t
$$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2$$
-Dirección de la velocidad
$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$$
-El tiempo máximo
$$t_{máx} = -\frac{V_{oy}}{g}$$
-Altura máxima
$$Y_{máx} = -\frac{Voy^2}{2g}$$
-Tiempo de vuelo
$$t_v = 2 \cdot t_{máx}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR

-Ecuaciones del período y frecuencia
$$T = \frac{t}{n} \qquad f = \frac{n}{t}$$
-Velocidad angular
$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad \omega = \frac{2\pi}{t}$$
-Velocidad angular en función de frecuencia y período
$$\omega = 2\pi f \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

-Velocidad lineal

$$V = \frac{2\pi Rn}{t}$$

-Velocidad lineal en función de frecuencia y período

$$V = 2\pi R f \qquad V = \frac{2\pi R}{T}$$

-Relación entre velocidad lineal y angular

$$V = \omega.R$$

-Aceleración centrípeta

$$a_c = \frac{V^2}{R} \qquad a_c = \omega^2.R$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

-Ecuación de la elongación

$$X = A.\cos(\omega t)$$

-Velocidad en función del tiempo

$$V_x = -A.\omega.\text{sen}(\omega t)$$

-Velocidad en función de elongación

$$V_x = \pm\ \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

-Ecuación de aceleración instantánea

En función de la elongación

$$a_c = -\omega^2.x$$

En función de velocidad angular y amplitud

$$a_c = -\omega^2.A\cos(\omega t)$$

-Ecuación del período para sistema masa resorte

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

-Ecuación del período de un péndulo

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

UNIDAD III

LAS INTERACCIONES

-Ecuación de la fuerza de roce

$$F_r = \mu_k.N$$

μ_k: es el coeficiente de fricción cinético

-Ley de gravitación universal

$$F = G.\frac{m.M}{R^2}$$

G: constante de gravitación universal

-Ley de Coulomb

$$F = K\frac{Q_1.Q_2}{r^2}$$

-Ecuación del Impulso

$$I = F.t$$

-Ecuación de la cantidad de movimiento

$$P = m.V$$

-Relación entre impulso y cantidad de movimiento

$$F.\Delta t = m.\Delta V$$

-Principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2$$

-Cantidad de movimiento de un sistema de partículas

$$P_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x}$$
$$P_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y}$$

-Magnitud de la cantidad de movimiento total del sistema

$$P^2 = Px^2 + Py^2$$

-Coordenadas del centro de masas

$$X_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Z_c = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

UNIDAD IV.

ENERGIA

-Trabajo mecánico

$$W = F.X$$
$$W = F.X.\cos\alpha$$

-Equivalencias entre unidades

1 Joule = 10^7 ergios

1 Kgm = 9,81 Joules

-Potencia mecánica

$$P = \frac{W}{t} \qquad P = \frac{F.X}{t}$$

-Potencia en función de velocidad media

$$P = F.V_m$$

-Equivalencias entre unidades

1 CV = 75 Kgm/s = 736 W

1 HP = 76 Kgm/s

1 Kw = 1000 W

1 Kwh = 36.10^5 Joules

1 litro = 1 Kp = 1 dm^3

-Energía cinética

$$Ec = 1/2\ m.V^2$$

-Energía potencial

$$Ep = m.g.Y$$

-Energía potencial elástica

$$Ep_e = 1/2\ k.X^2$$

CHOQUES ELÁSTICOS

-Velocidades después del choque en función de las masas y las velocidades antes del choque

$$V'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}.v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}.v_2$$

$$V'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}.v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.v_1$$